



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材



全国优秀教材
二等奖

数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社



全国优秀教材
二等奖



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材、普通高等教育“十一五”国家级规划教材和面向 21 世纪课程教材，主要内容包括实数集与函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数和微分、微分中值定理及其应用、实数的完备性、不定积分、定积分、定积分的应用、反常积分等，附录为实数理论和积分表，书后附微积分学简史。

本次修订是在第四版的基础上对一些内容进行适当调整，使教材逻辑性更合理，并适当补充数字资源。第五版仍旧保持前四版“内容选取适当，深入浅出，易教易学，可读性强”的特点。

本书可作为高等学校数学和其他相关专业的教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析.上册 / 华东师范大学数学科学学院编.
--5 版. --北京:高等教育出版社,2019.5(2025.5 重印)
ISBN 978-7-04-050694-5

I. ①数… II. ①华… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 229064 号

策划编辑	兰莹莹 李蕊	责任编辑	兰莹莹	封面设计	王凌波	版式设计	杜微言
插图绘制	于博	责任校对	李大鹏	责任印制	耿轩		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	20.25	版 次	1981 年 4 月第 1 版
字 数	440 千字		2019 年 5 月第 5 版
购书热线	010-58581118	印 次	2025 年 5 月第 13 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	44.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

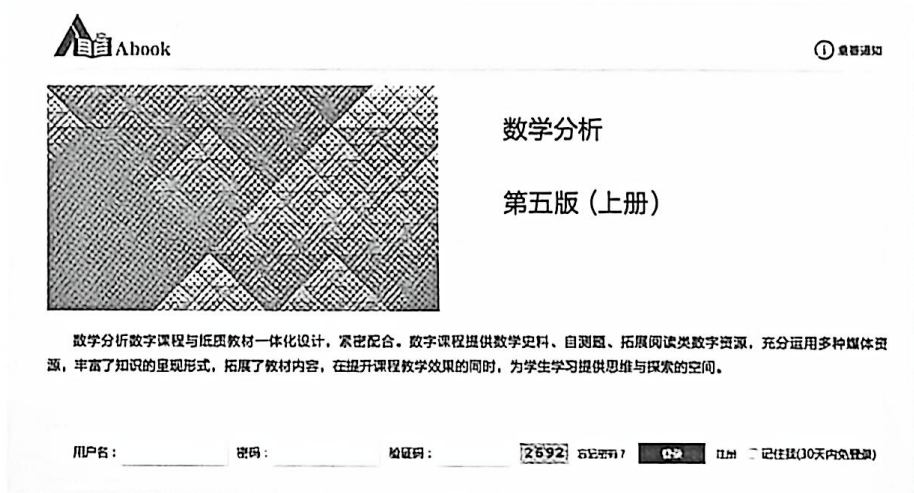
版权所有 侵权必究
物 料 号 50694-00

数学分析

第五版(上册)

华东师范大学数学科学学院 编

1. 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1210369>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
2. 注册并登录, 进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号(20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至 abook@hep.com.cn。



扫描二维码
下载 Abook 应用



数学分析简史(上)



数学分析简史(下)



编者的话(初版)

<http://abook.hep.com.cn/1210369>

第五版前言

华东师范大学数学系编写的《数学分析》(上、下册)自1980年初版诞生以来,相继于1990年和2001年两次再版,1987年荣获全国第一届高等学校优秀教材优秀奖,2004年荣获上海市优秀教材一等奖,并于2010年出版第四版。自第四版出版以来,教材向着信息化和精美化的方向发展,在使用中也发现了一些还可以继续完善的地方,在此背景下我们着手第五版修订。

为做好本次修订,前期我们进行了广泛调研,征集使用意见,并召开了教材修订会,而后根据当前教材发展的新形势,最终确定第五版的修订方案。本次修改的主要原则是基本保留第四版的风格,对某些不完善之处进行必要的处理,并适当补充数字资源(以图标 $\otimes$, $\textcircled{\text{QR}}$ 示意)。

本次修改的主要内容有:

1. 增加了对函数 $y=x^n, x>0$ 值域的讨论,从而明确了其反函数 $y=\sqrt[n]{x}$ 的定义域,这就补上了第四版的一个不足;
2. 为了保证大学数学与中学数学内容的衔接,根据授课老师的建议,此次再版将三角函数的和差化积公式、积化和差公式作为习题出现在教材上;
3. 在有理函数的部分分式分解讲解中,我们适当作了一些说明;
4. 对 $y=(1+x)^a$ 幂级数的展开式处理稍作修改;
5. 对一些例题进行适当的增减;
6. 将“微积分学简史”作为数字资源。

参加第五版编写工作的老师有:

庞学诚 任主编,并负责编写第一章至第七章;

吴畏 负责编写第八章至第十一章,以及第十三章;

柴俊 负责编写第十二章、第十四章至第十八章;

戴浩晖 负责编写第十九章至第二十三章。

在编写过程中,一直得到我校数学科学学院老师的关心和帮助,高等教育出版社的编辑也付出了辛勤的劳动,对此我们表示衷心的感谢。在这里我们还要感谢复旦大学楼红卫教授、浙江大学阮火军教授,同时还要感谢在本书的修订和出版过程中积极提出建议的所有朋友。



第四版前言



第三版前言



再版的话

本书自 1980 年第一版出版以来,深受广大读者的关爱与支持,在此我们一并致以深切谢意!并衷心希望读者在阅读和使用本教材的过程中继续提出宝贵意见。

编 者

2018 年 2 月

第一章 实数集与函数	1
§ 1 实数	1
一、实数及其性质	1
二、绝对值与不等式	3
§ 2 数集·确界原理	4
一、区间与邻域	4
二、有界集·确界原理	5
§ 3 函数概念	8
一、函数的定义	9
二、函数的表示法	9
三、函数的四则运算	10
四、复合函数	11
五、反函数	11
六、初等函数	13
§ 4 具有某些特性的函数	14
一、有界函数	15
二、单调函数	16
三、奇函数和偶函数	17
四、周期函数	17
第二章 数列极限	21
§ 1 数列极限概念	21
§ 2 收敛数列的性质	26
§ 3 数列极限存在的条件	32
第三章 函数极限	41
§ 1 函数极限概念	41
一、 x 趋于 ∞ 时函数的极限	41
二、 x 趋于 x_0 时函数的极限	42
§ 2 函数极限的性质	46
§ 3 函数极限存在的条件	50
§ 4 两个重要的极限	53
一、证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	53
二、证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	54

§ 5	无穷小量与无穷大量	56
一、	无穷小量	56
二、	无穷小量阶的比较	57
三、	无穷大量	59
四、	曲线的渐近线	61
第四章	函数的连续性	65
§ 1	连续性概念	65
一、	函数在一点的连续性	65
二、	间断点及其分类	66
三、	区间上的连续函数	68
§ 2	连续函数的性质	69
一、	连续函数的局部性质	69
二、	闭区间上连续函数的基本性质	71
三、	反函数的连续性	73
四、	一致连续性	74
§ 3	初等函数的连续性	78
一、	指数函数的连续性	78
二、	初等函数的连续性	80
第五章	导数和微分	83
§ 1	导数的概念	83
一、	导数的定义	83
二、	导函数	85
三、	导数的几何意义	87
§ 2	求导法则	90
一、	导数的四则运算	90
二、	反函数的导数	92
三、	复合函数的导数	93
四、	基本求导法则与公式	95
§ 3	参变量函数的导数	97
§ 4	高阶导数	100
§ 5	微分	104
一、	微分的概念	104
二、	微分的运算法则	106
三、	高阶微分	106
四、	微分在近似计算中的应用	107
第六章	微分中值定理及其应用	111
§ 1	拉格朗日定理和函数的单调性	111
一、	罗尔定理与拉格朗日定理	111
二、	单调函数	114
§ 2	柯西中值定理和不定式极限	117
一、	柯西中值定理	117
二、	不定式极限	118
§ 3	泰勒公式	125

一、带有佩亚诺型余项的泰勒公式	125
二、带有拉格朗日型余项的泰勒公式	128
三、在近似计算上的应用	130
§ 4 函数的极值与最大(小)值	132
一、极值判别	132
二、最大值与最小值	134
§ 5 函数的凸性与拐点	137
§ 6 函数图像的讨论	143
* § 7 方程的近似解	145
第七章 实数的完备性	150
§ 1 关于实数集完备性的基本定理	150
一、区间套定理	150
二、聚点定理与有限覆盖定理	151
三、实数完备性基本定理之间的等价性	154
* § 2 上极限和下极限	156
第八章 不定积分	161
§ 1 不定积分概念与基本积分公式	161
一、原函数与不定积分	161
二、基本积分表	163
§ 2 换元积分法与分部积分法	166
一、换元积分法	166
二、分部积分法	171
§ 3 有理函数和可化为有理函数的不定积分	175
一、有理函数的不定积分	175
二、三角函数有理式的不定积分	179
三、某些无理根式的不定积分	180
第九章 定积分	186
§ 1 定积分概念	186
一、问题提出	186
二、定积分的定义	187
§ 2 牛顿—莱布尼茨公式	190
§ 3 可积条件	192
一、可积的必要条件	193
二、可积的充要条件	193
三、可积函数类	194
§ 4 定积分的性质	198
一、定积分的基本性质	198
二、积分中值定理	202
§ 5 微积分学基本定理·定积分计算(续)	205
一、变限积分与原函数的存在性	205
二、换元积分法与分部积分法	209
三、泰勒公式的积分型余项	212
* § 6 可积性理论补叙	215

一、上和与下和的性质	215
二、可积的充要条件	217
第十章 定积分的应用	222
§ 1 平面图形的面积	222
§ 2 由平行截面面积求体积	225
§ 3 平面曲线的弧长与曲率	229
一、平面曲线的弧长	229
二、曲率	233
§ 4 旋转曲面的面积	236
一、微元法	236
二、旋转曲面的面积	237
§ 5 定积分在物理中的某些应用	239
一、液体静压力	239
二、引力	240
三、功与平均功率	241
*§ 6 定积分的近似计算	243
一、梯形法	243
二、抛物线法	244
第十一章 反常积分	247
§ 1 反常积分概念	247
一、问题提出	247
二、两类反常积分的定义	248
§ 2 无穷积分的性质与敛散判别	252
一、无穷积分的性质	252
二、非负函数无穷积分的敛散判别法	253
三、一般无穷积分的敛散判别法	255
§ 3 瑕积分的性质与敛散判别	258
附录 I 实数理论	263
一、建立实数的原则	263
二、分析	264
三、分划全体所成的有序集	266
四、 $\mathbf{R}$ 中的加法	267
五、 $\mathbf{R}$ 中的乘法	268
六、 $\mathbf{R}$ 作为 $\mathbf{Q}$ 的扩充	270
七、实数的无限小数表示	271
八、无限小数四则运算的定义	272
附录 II 积分表	275
一、含有 x^n 的形式	275
二、含有 $a+bx$ 的形式	275
三、含有 $a^2 \pm x^2, a>0$ 的形式	276
四、含有 $a+bx+cx^2, b^2 \neq 4ac$ 的形式	276
五、含有 $\sqrt{a+bx}$ 的形式	276

六、含有 $\sqrt{x^2 \pm a^2}, a > 0$ 的形式	277
七、含有 $\sqrt{a^2 - x^2}, a > 0$ 的形式	277
八、含有 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的形式	278
九、含有 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 的形式	279
十、含有反三角函数的形式	279
十一、含有 e^x 的形式	280
十二、含有 $\ln x$ 的形式	280
部分习题答案与提示	282
索引	303
③③③ 微积分学简史	308

§ 1 关于实数集完备性的基本定理

在第一、二章中,我们证明了关于实数集的确界原理和数列的单调有界定理,给出了数列的致密性定理和柯西收敛准则.这些命题以不同方式反映了实数集 $\mathbf{R}$ 的一种特性,通常称为实数的完备性或实数的连续性.可以举例说明,有理数集就不具有这种特性(本节习题 4).有关实数集完备性的基本定理,除上面这些定理外,还有区间套定理、聚点定理和有限覆盖定理.在本节中将阐述这三个基本定理,并指出所有这六个基本定理的等价性.

一、区间套定理

定义 1 设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 具有如下性质:

- (i) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \dots;$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$

则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套,或简称区间套.

这里性质(i)表明,构成区间套的闭区间列是前一个套着后一个,即各闭区间的端点满足如下不等式:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1. \quad (1)$$

定理 7.1(区间套定理) 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套,则在实数系中存在唯一一点 ξ ,使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$,即

$$a_n \leq \xi \leq b_n, n = 1, 2, \dots. \quad (2)$$

证 由(1)式, $\{a_n\}$ 为递增有界数列,依单调有界定理, $\{a_n\}$ 有极限 ξ ,且有

$$a_n \leq \xi, n = 1, 2, \dots. \quad (3)$$

同理,递减有界数列 $\{b_n\}$ 也有极限,并按区间套的条件(ii),有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi, \quad (4)$$

且

$$b_n \geq \xi, n = 1, 2, \dots. \quad (5)$$

联合(3)、(5)即得(2)式.

最后证明满足(2)的 ξ 是唯一的.设数 ξ' 也满足

$$a_n \leq \xi' \leq b_n, n = 1, 2, \dots,$$

则由(2)式有

$$|\xi - \xi'| \leq b_n - a_n, n = 1, 2, \dots.$$

由区间套的条件(ii)得

$$|\xi - \xi'| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

故有 $\xi' = \xi$.

□

由(4)式容易推得如下很有用的区间套性质:

推论 若 $\xi \in [a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, \dots$) 是区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 所确定的点, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$[a_n, b_n] \subset U(\xi; \varepsilon).$$

注 区间套定理中要求各个区间都是闭区间, 才能保证定理的结论成立. 对于开区间列, 如 $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$, 虽然其中各个开区间也是前一个包含后一个, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 0\right) = 0$, 但不存在属于所有开区间的公共点.

例 1 用区间套定理证明连续函数根的存在性定理.

证 设 f 在区间 $[a, b]$ 上连续, $f(a)f(b) < 0$, 并且记 $[a_1, b_1] = [a, b]$. 令 $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, 如果 $f(c_1) = 0$, 结论已经成立, 故可设 $f(c_1) \neq 0$. 那么 $f(a_1)f(c_1)$ 与 $f(c_1)f(b_1)$ 有一个小于零, 不妨设 $f(a_1)f(c_1) < 0$, 记 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$. 再令 $c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$, 如果 $f(c_2) = 0$, 结论已经成立, 故同样可设 $f(c_2) \neq 0$. 那么 f 在 $[a_2, c_2]$ 与 $[c_2, b_2]$ 这两个区间中的某一个区间上端点值异号, 并记这个区间为 $[a_3, b_3]$. 将这个过程无限重复下去, 就得到一系列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足:

$$(1) [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \dots;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^{n-1}} = 0;$$

$$(3) f(a_n)f(b_n) < 0, n = 1, 2, \dots.$$

由(1)和(2)可知 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套, 由定理 7.1, 存在 $\xi \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. 因为 f 在点 ξ 连续, 所以由(3)得

$$f^2(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0,$$

则必有 $f(\xi) = 0$. 显然 $\xi \in [a, b]$, 它就是 f 的一个零点.

□

二、聚点定理与有限覆盖定理

定义 2 设 S 为数轴上的点集, ξ 为定点 (它可以属于 S , 也可以不属于 S). 若 ξ 的任何邻域都含有 S 中无穷多个点, 则称 ξ 为点集 S 的一个聚点.

例如, 点集 $S = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 有两个聚点 $\xi_1 = -1$ 和 $\xi_2 = 1$; 点集 $S = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ 只有一个聚点 $\xi = 0$; 又若 S 为开区间 (a, b) , 则 (a, b) 上每一点以及端点 a, b 都是 S 的聚点; 而正整数集 $\mathbf{N}_+$ 没有聚点, 任何有限数集也没有聚点.