"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

全国优秀教材
二等奖

数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社

全国优秀教材
二等奖

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材、普通高等教育“十一五”国家级规划教材和面向21世纪课程教材，主要内容包括实数集与函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数和微分、微分中值定理及其应用、实数的完备性、不定积分、定积分、定积分的应用、反常积分等，附录为实数理论和积分表，书后附微积分学简史。

本次修订是在第四版的基础上对一些内容进行适当调整，使教材逻辑性更合理，并适当补充数字资源。第五版仍旧保持前四版“内容选取适当，深入浅出，易教易学，可读性强”的特点。.

本书可作为高等学校数学和其他相关专业的教材使用。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析.上册／华东师范大学数学科学学院编.--5版.--北京:高等教育出版社,2019.5(2025.5重印)
ISBN 978-7-04-050694-5

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①华…　Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材　Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第229064号

策划编辑　兰莹莹　李　蕊　　责任编辑　兰莹莹　　封面设计　王凌波　　版式设计　杜微言
插图绘制　于　博　　责任校对　李大鹏　　责任印制　耿　轩

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	20.25	版　　次	1981年4月第1版
字　　数	440千字		2019年5月第5版
购书热线	010-58581118	印　　次	2025年5月第13次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	44.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　50694-00

目 录

6

7

证　不妨设 f 在 $[a,b]$ 上严格增. 此时 f 的值域即反函数 f^{-1} 的定义域为 $[f(a),f(b)]$. 任取 $y_0\in(f(a),f(b))$，设 $x_0=f^{-1}(y_0)$，则 $x_0\in(a,b)$. 于是对任给的 $\varepsilon>0$，可在 (a,b) 上 x_0 的两侧各取异于 x_0 的点 x_1,x_2 $(x_1<x_0<x_2)$，使它们与 x_0 的距离小于 ε（图4-5）.

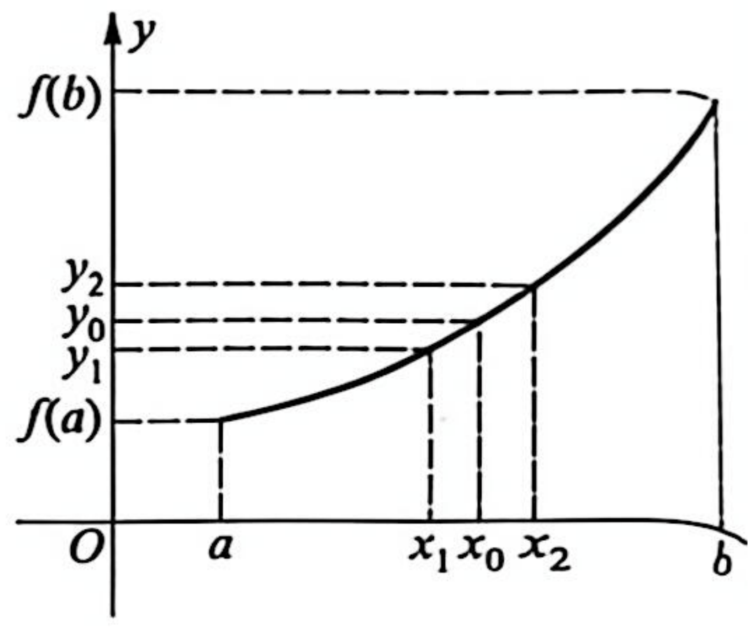

图 4-5

设与 x_1,x_2 对应的函数值分别为 y_1,y_2，由 f 的严格增性知 $y_1<y_0<y_2$. 令

$$\delta=\min\{y_2-y_0,y_0-y_1\},$$

则当 $y\in U(y_0;\delta)$ 时，对应的 $x=f^{-1}(y)$ 的值都落在 x_1 与 x_2 之间，故有

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|=|x-x_0|<\varepsilon,$$

这就证明了 f^{-1} 在点 y_0 连续，从而 f^{-1} 在 $(f(a),f(b))$ 上连续.

类似地可证 f^{-1} 在其定义区间的端点 $f(a)$ 与 $f(b)$ 分别为右连续与左连续. 所以在 $[f(a),f(b)]$ 上连续.

例 5　由于 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调且连续，故其反函数 $y=\arcs$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续.

同理可得其他反三角函数也在相应的定义区间上连续. 如 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1$ 连续，$y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续等.

例 6　由于 $y=x^n$（n 为正整数）在 $[0,+\infty)$ 上严格单调且连续，其值域为 $[0,+\infty$ 故 $y=x^{\frac{1}{n}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 又若把 $y=x^{-\frac{1}{n}}$（n 为正整数）看作由 $y=u^{\frac{1}{n}}$ 与 $u=\dfrac{1}{x}$ 复合而的函数，则由复合函数的连续性，$y=x^{-\frac{1}{n}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

综上可知，若 q 为非零整数，则 $y=x^{\frac{1}{q}}$ 是其定义区间上的连续函数.

例 7　证明：有理幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在其定义区间上连续.

证　设有理数 $\alpha=\dfrac{p}{q}$，这里 $p,q\ (\neq 0)$ 为整数. 因为 $y=u^{\frac{1}{q}}$ 与 $u=x^p$ 均在其定义区上连续，所以复合函数

$$y=(x^p)^{\frac{1}{q}}=x^{\alpha}$$

也是其定义区间上的连续函数.

四、一致连续性

函数 f 在区间上连续，是指 f 在该区间上每一点都连续. 本段中讨论的一致连续概念反映了函数在区间上更强的连续性.

定义 2　设 f 为定义在区间 I 上的函数. 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得任何 $x',x''\in I$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在区间 I 上**一致连续**.

直观地说，f 在 I 上一致连续意味着：不论两点 x' 与 x'' 在 I 中处于什么位置，只

它们的距离小于 δ，就可使 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

例 8　证明 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证　任给 $\varepsilon>0$，由于

$$|f(x')-f(x'')|=|a|\,|x'-x''|,$$

故可选取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}$，则对任何 $x',x''\in(-\infty,+\infty)$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

这就证得 $f(x)=ax+b$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.　□

例 9　证明函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续（尽管它在 $(0,1)$ 上每一点都连续）.

证　按一致连续性的定义，为证函数 f 在某区间 I 上不一致连续，只需证明：存在某 $\varepsilon_0>0$，对任何正数 δ（不论 δ 多么小），总存在两点 $x',x''\in I$，尽管 $|x'-x''|<\delta$，但有 $|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$.

对于本例中函数 $y=\dfrac{1}{x}$，可取 $\varepsilon_0=1$，对无论多么小的正数 $\delta\left(<\dfrac{1}{2}\right)$，只要取 $x'=\delta$ 与 $x''=\dfrac{\delta}{2}$（图 4-6），则虽有

$$|x'-x''|=\frac{\delta}{2}<\delta,$$

但

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{1}{\delta}>1,$$

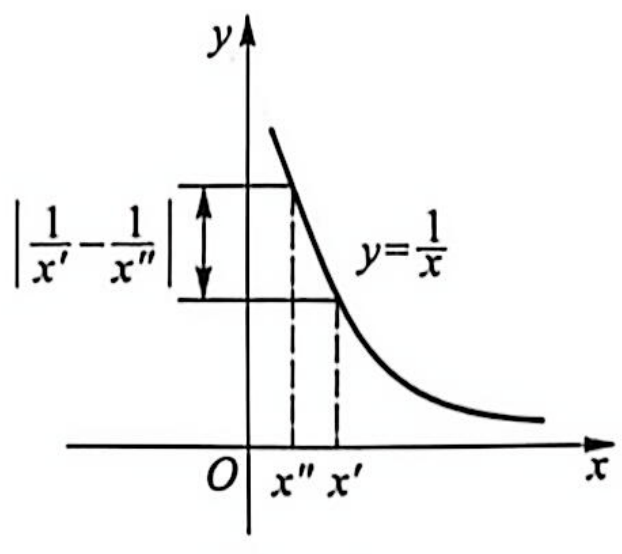

图 4-6

所以 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.　□

例 10　函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上，试证 $f(x)$ 在 I 上一致连续的充要条件为：对任何数列 $\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，则

归结原则

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]=0.$$

证　必要性　若 $f(x)$ 在 I 上一致连续，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0,\forall x',x''\in I,|x'-x''|<\delta$，则 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 设 I 上两个数列 $\{x_n'\},\{x_n''\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，于是对上述 $\delta>0$，$\exists N>0,\forall n>N,|x_n'-x_n''|<\delta$，由一致连续性条件，有

$$|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]=0.$$

充分性　设对 I 上任意两个数列 $\{x_n'\}$ 与 $\{x_n''\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]=0$. 现证 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

用反证法. 若 $f(x)$ 在 I 上不一致连续，则

$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x',x''$，满足 $|x'-x''|<\delta$，但有 $|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$.

取 $\delta_1=1$，$\exists x_1', x_1''\in I$，$|x_1'-x_1''|<1$，有 $|f(x_1')-f(x_1'')|\geqslant\varepsilon_0$，

取 $\delta_2=\dfrac{1}{2}$，$\exists x_2', x_2''\in I$，$|x_2'-x_2''|<\dfrac{1}{2}$，有 $|f(x_2')-f(x_2'')|\geqslant\varepsilon_0$，

…………

取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，$\exists x_n', x_n''\in I$，$|x_n'-x_n''|<\dfrac{1}{n}$，有 $|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0$，

…………

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，但是 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]\neq 0$，与所设条件矛盾. 所以 $f(x)$ 在致连续.

例 11　证明 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上不一致连续.

证　取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，$n=1,2,\cdots$. 虽然

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0,$$

但是

$$\left|\sin\frac{1}{x_n}-\sin\frac{1}{y_n}\right|=1\nrightarrow 0,$$

故由例 10 的结论推得 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

函数在区间上的连续与一致连续这两个概念有着重要的差别. f 在区间 I 上是指任给 $\varepsilon>0$，对每一点 $x\in I$，都存在相应的正数 $\delta=\delta(\varepsilon,x)$，只要 $x'\in I$ 且 $|x-x'$ 就有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. 一般来说，对于 I 上不同的点，相应的正数 δ 是不同的. 换说，δ 的取值除依赖于 ε 之外，还与点 x 有关，由此我们写 $\delta=\delta(\varepsilon,x)$ 以表示 δ 与 ε 的依赖关系. 如果能做到 δ 只与 ε 有关，而与 x 无关，或者说存在适合于 I 上所有的公共的 δ，即 $\delta=\delta(\varepsilon)$，那么函数就不仅在 I 上连续，而且是一致连续了.

所以，f 在区间 I 上一致连续是 f 的又一个整体性质，由它可推出 f 在 I 上每都连续的这一局部性质（只要在定义 2 中把 x' 看作定点，把 x'' 看作动点，即得 f 在连续）. 而从例 9 可见，由 f 在区间 I 上每一点都连续，并不能推出 f 在 I 上一致连而，对于定义在闭区间上的函数来说，由它在每一点都连续却可推出在区间上的连续性，即有如下重要定理：

定理 4.9（一致连续性定理）　若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 致连续.

证　若不然，存在 $\varepsilon_0>0$，以及区间 $[a,b]$ 上的点列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$

但是　　5B/10

$$|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0,\quad n=1,2,\cdots.$$

因为 $\{x_n\}$ 有界，所以由致密性定理，$\{x_n\}$ 有一个收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$，从而

$$\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim_{k\to\infty}[(y_{n_k}-x_{n_k})+x_{n_k}]=x_0,$$

又 $a\leqslant x_{n_k}\leqslant b$，由极限的不等式性质推得 $a\leqslant x_0\leqslant b$，故 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 由归结原

(7)式得

$$\varepsilon_0 \leqslant \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})-f(y_{n_k})| = |f(x_0)-f(x_0)| = 0,$$

矛盾. □

例 12 设区间 I_1 的右端点为 $c\in I_1$,区间 I_2 的左端点也为 $c\in I_2$(I_1,I_2 可分别为有限或无限区间).试按一致连续性的定义证明:若 f 分别在 I_1 和 I_2 上一致连续,则 f 在 $I=I_1\cup I_2$ 上也一致连续.

证 任给 $\varepsilon>0$,由 f 在 I_1 和 I_2 上的一致连续性,分别存在正数 δ_1 和 δ_2,使得对任何 $x',x''\in I_1$,只要 $|x'-x''|<\delta_1$,就有

$$|f(x')-f(x'')| < \varepsilon; \tag{8}$$

又对任何 $x',x''\in I_2$,只要 $|x'-x''|<\delta_2$,也有(8)式成立.

点 $x=c$ 作为 I_1 的右端点,f 在点 c 为左连续,作为 I_2 的左端点,f 在点 c 为右连续,所以 f 在点 c 连续.故对上述 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_3>0$,当 $|x-c|<\delta_3$ 时,有

$$|f(x)-f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$,对任何 $x',x''\in I$,$|x'-x''|<\delta$,分别讨论以下两种情形:

(i) x',x''同时属于 I_1 或同时属于 I_2,则(8)式成立.

(ii) x',x''分属 I_1 与 I_2,设 $x'\in I_1$,$x''\in I_2$,则

$$|x'-c| = c-x' < x''-x' < \delta \leqslant \delta_3,$$

故由(9)式得 $|f(x')-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}$.同理得 $|f(x'')-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}$.从而也有(8)式成立.这就证明了 f 在 I 上一致连续. □

习 题 4.2

1. 讨论复合函数 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 的连续性,设

(1) $f(x)=\operatorname{sgn} x$,$g(x)=1+x^2$;

(2) $f(x)=\operatorname{sgn} x$,$g(x)=(1-x^2)x$.

2. 设 f,g 在点 x_0 连续,证明:

(1) 若 $f(x_0)>g(x_0)$,则存在 $U(x_0;\delta)$,使在其上有 $f(x)>g(x)$;

(2) 若在某 $U^\circ(x_0)$ 上有 $f(x)>g(x)$,则 $f(x_0)\geqslant g(x_0)$.

3. 设 f,g 在区间 I 上连续.记

$$F(x) = \max\{f(x),g(x)\},\ G(x) = \min\{f(x),g(x)\}.$$

证明 F 和 G 也都在 I 上连续.

提示:利用第一章总练习题 1.

4. 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上连续函数,常数 $c>0$.记

$$F(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & |f(x)| \leqslant c, \\ c, & f(x) > c. \end{cases}$$

证明 F 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

提示:$F(x)=\max\{-c,\min\{c,f(x)\}\}$.

第四版被评为 2011 年度普通高等教育精品教材

第一版荣获全国第一届高等学校优秀教材优秀奖

数字课程网站

网址：http://abook.hep.com.cn/1210369

http://abook.hep.edu.cn/1210369

数字课程账号　使用说明详见书内数字课程说明页

ISBN 978-7-04-050694-5

定价 44.80 元