



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材



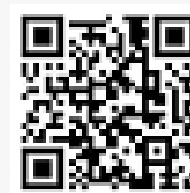
全国优秀教材  
二等奖

# 数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App



全国优秀教材  
二等奖



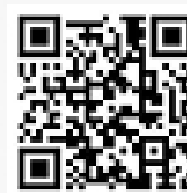
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

# 数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社·北京



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

## 内容提要

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材、普通高等教育“十一五”国家级规划教材和面向 21 世纪课程教材, 主要内容包括实数集与函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数和微分、微分中值定理及其应用、实数的完备性、不定积分、定积分、定积分的应用、反常积分等, 附录为实数理论和积分表, 书后附微积分学简史。

本次修订是在第四版的基础上对一些内容进行适当调整, 使教材逻辑性更合理, 并适当补充数字资源。第五版仍旧保持前四版“内容选取适当, 深入浅出, 易教易学, 可读性强”的特点。

本书可作为高等学校数学和其他相关专业的教材使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 上册 / 华东师范大学数学科学学院编.  
--5 版. --北京: 高等教育出版社, 2019. 5 (2025. 5 重印)  
ISBN 978-7-04-050694-5

I. ①数… II. ①华… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 229064 号

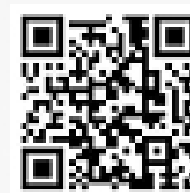
策划编辑 兰莹莹 李蕊      责任编辑 兰莹莹      封面设计 王凌波      版式设计 杜微言  
插图绘制 于博              责任校对 李大鹏      责任印制 耿轩

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a>
印 刷	山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司		<a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>
开 本	787mm×1092mm 1/16		<a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>
印 张	20.25	版 次	1981 年 4 月第 1 版
字 数	440 千字		2019 年 5 月第 5 版
购书热线	010-58581118	印 次	2025 年 5 月第 13 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	44.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 50694-00



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

<b>第一章 实数集与函数</b> .....	1
§ 1 实数 .....	1
一、实数及其性质 .....	1
二、绝对值与不等式 .....	3
§ 2 数集·确界原理 .....	4
一、区间与邻域 .....	4
二、有界集·确界原理 .....	5
§ 3 函数概念 .....	8
一、函数的定义 .....	9
二、函数的表示法 .....	9
三、函数的四则运算 .....	10
四、复合函数 .....	11
五、反函数 .....	11
六、初等函数 .....	13
§ 4 具有某些特性的函数 .....	14
一、有界函数 .....	15
二、单调函数 .....	16
三、奇函数和偶函数 .....	17
四、周期函数 .....	17
<b>第二章 数列极限</b> .....	21
§ 1 数列极限概念 .....	21
§ 2 收敛数列的性质 .....	26
§ 3 数列极限存在的条件 .....	32
<b>第三章 函数极限</b> .....	41
§ 1 函数极限概念 .....	41
一、 $x$ 趋于 $\infty$ 时函数的极限 .....	41
二、 $x$ 趋于 $x_0$ 时函数的极限 .....	42
§ 2 函数极限的性质 .....	46
§ 3 函数极限存在的条件 .....	50
§ 4 两个重要的极限 .....	53
一、证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .....	53
二、证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .....	54



§ 5	无穷小量与无穷大量 .....	S <sub>5</sub>
一、	无穷小量 .....	S <sub>5</sub>
二、	无穷小量阶的比较 .....	S <sub>7</sub>
三、	无穷大量 .....	S <sub>9</sub>
四、	曲线的渐近线 .....	61
<b>第四章</b>	<b>函数的连续性</b> .....	63
§ 1	连续性概念 .....	63
一、	函数在一点的连续性 .....	63
二、	间断点及其分类 .....	66
三、	区间上的连续函数 .....	68
§ 2	连续函数的性质 .....	69
一、	连续函数的局部性质 .....	69
二、	闭区间上连续函数的基本性质 .....	71
三、	反函数的连续性 .....	73
四、	一致连续性 .....	74
§ 3	初等函数的连续性 .....	78
一、	指数函数的连续性 .....	78
二、	初等函数的连续性 .....	80
<b>第五章</b>	<b>导数和微分</b> .....	83
§ 1	导数的概念 .....	83
一、	导数的定义 .....	83
二、	导函数 .....	85
三、	导数的几何意义 .....	87
§ 2	求导法则 .....	90
一、	导数的四则运算 .....	90
二、	反函数的导数 .....	92
三、	复合函数的导数 .....	93
四、	基本求导法则与公式 .....	95
§ 3	参变量函数的导数 .....	97
§ 4	高阶导数 .....	100
§ 5	微分 .....	104
一、	微分的概念 .....	104
二、	微分的运算法则 .....	106
三、	高阶微分 .....	106
四、	微分在近似计算中的应用 .....	107
<b>第六章</b>	<b>微分中值定理及其应用</b> .....	111
§ 1	拉格朗日定理和函数的单调性 .....	111
一、	罗尔定理与拉格朗日定理 .....	111
二、	单调函数 .....	114
§ 2	柯西中值定理和不定式极限 .....	117
一、	柯西中值定理 .....	117
二、	不定式极限 .....	118
§ 3	泰勒公式 .....	125




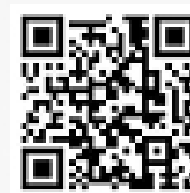
一、带有佩亚诺型余项的泰勒公式 .....	125
二、带有拉格朗日型余项的泰勒公式 .....	128
三、在近似计算上的应用 .....	130
§ 4 函数的极值与最大(小)值 .....	132
一、极值判别 .....	132
二、最大值与最小值 .....	134
§ 5 函数的凸性与拐点 .....	137
§ 6 函数图像的讨论 .....	143
§ 7 方程的近似解 .....	145
<b>第七章 实数的完备性</b> .....	<b>150</b>
§ 1 关于实数集完备性的基本定理 .....	150
一、区间套定理 .....	150
二、聚点定理与有限覆盖定理 .....	151
三、实数完备性基本定理之间的等价性 .....	154
§ 2 上极限和下极限 .....	156
<b>第八章 不定积分</b> .....	<b>161</b>
§ 1 不定积分概念与基本积分公式 .....	161
一、原函数与不定积分 .....	161
二、基本积分表 .....	163
§ 2 换元积分法与分部积分法 .....	166
一、换元积分法 .....	166
二、分部积分法 .....	171
§ 3 有理函数和可化为有理函数的不定积分 .....	175
一、有理函数的不定积分 .....	175
二、三角函数有理式的不定积分 .....	179
三、某些无理根式的不定积分 .....	180
<b>第九章 定积分</b> .....	<b>186</b>
§ 1 定积分概念 .....	186
一、问题提出 .....	186
二、定积分的定义 .....	187
§ 2 牛顿—莱布尼茨公式 .....	190
§ 3 可积条件 .....	192
一、可积的必要条件 .....	193
二、可积的充要条件 .....	193
三、可积函数类 .....	194
§ 4 定积分的性质 .....	198
一、定积分的基本性质 .....	198
二、积分中值定理 .....	202
§ 5 微积分学基本定理·定积分计算(续) .....	205
一、变限积分与原函数的存在性 .....	205
二、换元积分法与分部积分法 .....	209
三、泰勒公式的积分型余项 .....	212
§ 6 可积性理论补叙 .....	215



一、上和与下和的性质 .....	215
二、可积的充要条件 .....	217
<b>第十章 定积分的应用 .....</b>	<b>222</b>
§ 1 平面图形的面积 .....	222
§ 2 由平行截面面积求体积 .....	225
§ 3 平面曲线的弧长与曲率 .....	229
一、平面曲线的弧长 .....	229
二、曲率 .....	233
§ 4 旋转曲面的面积 .....	236
一、微元法 .....	236
二、旋转曲面的面积 .....	237
§ 5 定积分在物理中的某些应用 .....	239
一、液体静压力 .....	239
二、引力 .....	240
三、功与平均功率 .....	241
*§ 6 定积分的近似计算 .....	243
一、梯形法 .....	243
二、抛物线法 .....	244
<b>第十一章 反常积分 .....</b>	<b>247</b>
§ 1 反常积分概念 .....	247
一、问题提出 .....	247
二、两类反常积分的定义 .....	248
§ 2 无穷积分的性质与敛散判别 .....	252
一、无穷积分的性质 .....	252
二、非负函数无穷积分的敛散判别法 .....	253
三、一般无穷积分的敛散判别法 .....	255
§ 3 瑕积分的性质与敛散判别 .....	258
<b>附录 I 实数理论 .....</b>	<b>263</b>
一、建立实数的原则 .....	263
二、分析 .....	264
三、分划全体所成的有序集 .....	266
四、 $\mathbf{R}$ 中的加法 .....	267
五、 $\mathbf{R}$ 中的乘法 .....	268
六、 $\mathbf{R}$ 作为 $\mathbf{Q}$ 的扩充 .....	270
七、实数的无限小数表示 .....	271
八、无限小数四则运算的定义 .....	272
<b>附录 II 积分表 .....</b>	<b>275</b>
一、含有 $x^n$ 的形式 .....	275
二、含有 $a+bx$ 的形式 .....	275
三、含有 $a^2 \pm x^2, a > 0$ 的形式 .....	276
四、含有 $a+bx+cx^2, b^2 \neq 4ac$ 的形式 .....	276
五、含有 $\sqrt{a+bx}$ 的形式 .....	277



六、含有 $\sqrt{x^2 \pm a^2}, a > 0$ 的形式 .....	277
七、含有 $\sqrt{a^2 - x^2}, a > 0$ 的形式 .....	277
八、含有 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的形式 .....	278
九、含有 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 的形式 .....	279
十、含有反三角函数的形式 .....	279
十一、含有 $e^x$ 的形式 .....	280
十二、含有 $\ln x$ 的形式 .....	280
<b>部分习题答案与提示</b> .....	<b>282</b>
<b>索引</b> .....	<b>303</b>
 <b>微积分学简史</b> .....	<b>308</b>



证 不妨设  $f$  在  $[a, b]$  上严格增. 此时  $f$  的值域即反函数  $f^{-1}$  的定义域为  $[f(a), f(b)]$ . 任取  $y_0 \in (f(a), f(b))$ , 设  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ , 则  $x_0 \in (a, b)$ . 于是对任给的  $\varepsilon > 0$ , 可在  $(a, b)$  上  $x_0$  的两侧各取异于  $x_0$  的点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_0 < x_2$ ), 使它们与  $x_0$  的距离小于  $\varepsilon$  (图4-5).

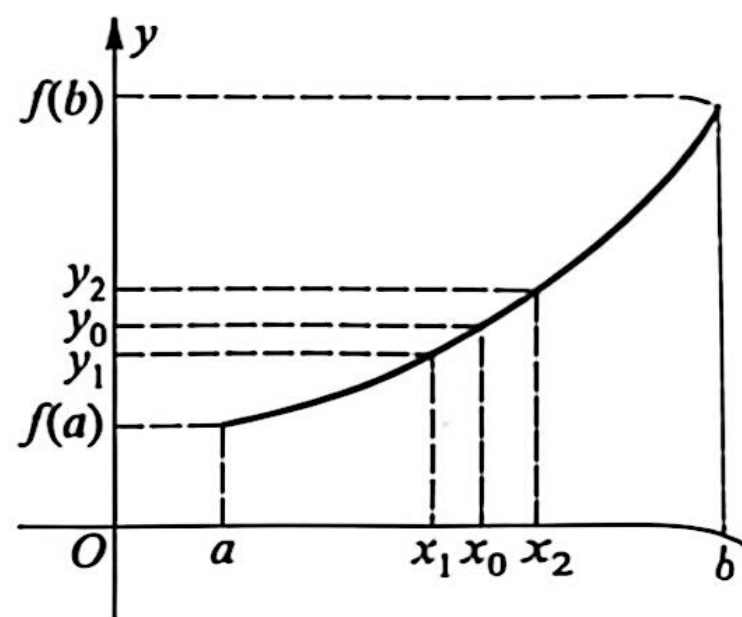


图 4-5

设与  $x_1, x_2$  对应的函数值分别为  $y_1, y_2$ , 由  $f$  的严格增性知  $y_1 < y_0 < y_2$ . 令

$$\delta = \min |y_2 - y_0, y_0 - y_1|,$$

则当  $y \in U(y_0; \delta)$  时, 对应的  $x = f^{-1}(y)$  的值都落在  $x_1$  与  $x_2$  之间, 故有

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon,$$

这就证明了  $f^{-1}$  在点  $y_0$  连续, 从而  $f^{-1}$  在  $(f(a), f(b))$  上连续.

类似地可证  $f^{-1}$  在其定义区间的端点  $f(a)$  与  $f(b)$  分别为右连续与左连续. 所以在  $[f(a), f(b)]$  上连续.

例 5 由于  $y = \sin x$  在区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上严格单调且连续, 故其反函数  $y = \arcsin x$  在区间  $[-1, 1]$  上连续.

同理可得其他反三角函数也在相应的定义区间上连续. 如  $y = \arccos x$  在  $[-1, 1]$  连续,  $y = \arctan x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续等.

例 6 由于  $y = x^n$  ( $n$  为正整数) 在  $[0, +\infty)$  上严格单调且连续, 其值域为  $[0, +\infty)$  故  $y = x^{\frac{1}{n}}$  在  $[0, +\infty)$  上连续. 又若把  $y = x^{-\frac{1}{n}}$  ( $n$  为正整数) 看作由  $y = u^{\frac{1}{n}}$  与  $u = \frac{1}{x}$  复合而成的函数, 则由复合函数的连续性,  $y = x^{-\frac{1}{n}}$  在  $(0, +\infty)$  上连续.

综上所述, 若  $q$  为非零整数, 则  $y = x^{\frac{1}{q}}$  是其定义区间上的连续函数.

例 7 证明: 有理幂函数  $y = x^\alpha$  在其定义区间上连续.

证 设有理数  $\alpha = \frac{p}{q}$ , 这里  $p, q$  ( $\neq 0$ ) 为整数. 因为  $y = u^{\frac{1}{q}}$  与  $u = x^p$  均在其定义区间上连续, 所以复合函数

$$y = (x^p)^{\frac{1}{q}} = x^\alpha$$

也是其定义区间上的连续函数.

#### 四、一致连续性

函数  $f$  在区间上连续, 是指  $f$  在该区间上每一点都连续. 本段中讨论的一致连续概念反映了函数在区间上更强的连续性.

定义 2 设  $f$  为定义在区间  $I$  上的函数. 若对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , 使得任何  $x', x'' \in I$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

则称函数  $f$  在区间  $I$  上一致连续.

直观地说,  $f$  在  $I$  上一致连续意味着: 不论两点  $x'$  与  $x''$  在  $I$  中处于什么位置, 只



它们的距离小于  $\delta$ , 就可使  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

例8 证明  $f(x) = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) 在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续.

证 任给  $\varepsilon > 0$ , 由于

$$|f(x') - f(x'')| = |a| |x' - x''|,$$

故可选取  $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ , 则对任何  $x', x'' \in (-\infty, +\infty)$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

这就证得  $f(x) = ax + b$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续.  $\square$

例9 证明函数  $y = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  上不一致连续(尽管它在  $(0, 1)$  上每一点都连续).

证 按一致连续性的定义, 为证函数  $f$  在某区间  $I$  上不一致连续, 只需证明: 存在某  $\varepsilon_0 > 0$ , 对任何正数  $\delta$  (不论  $\delta$  多么小), 总存在两点  $x', x'' \in I$ , 尽管  $|x' - x''| < \delta$ , 但有  $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$ .

对于本例中函数  $y = \frac{1}{x}$ , 可取  $\varepsilon_0 = 1$ , 对无论多么小的正数  $\delta$  ( $< \frac{1}{2}$ ), 只要取  $x' = \delta$  与  $x'' = \frac{\delta}{2}$  (图 4-6), 则虽有

$$|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

但

$$\left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \frac{1}{\delta} > 1,$$

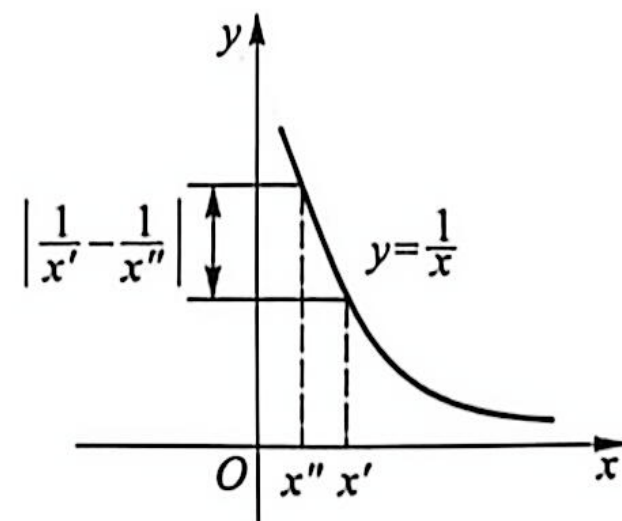


图 4-6

所以  $y = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  上不一致连续.  $\square$

例10 函数  $f(x)$  定义在区间  $I$  上, 试证  $f(x)$  在  $I$  上一致连续的充要条件为: 对任何数列  $\{x'_n\}, \{x''_n\} \subset I$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x'_n) - f(x''_n)] = 0.$$

证 必要性 若  $f(x)$  在  $I$  上一致连续, 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta$ , 则  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ . 设  $I$  上两个数列  $\{x'_n\}, \{x''_n\}$ , 满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$ , 于是对 上述  $\delta > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |x'_n - x''_n| < \delta$ , 由一致连续性条件, 有

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x'_n) - f(x''_n)] = 0.$$

充分性 设对  $I$  上任意两个数列  $\{x'_n\}$  与  $\{x''_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x'_n) - f(x''_n)] = 0$ . 现证  $f(x)$  在  $I$  上一致连续.

用反证法. 若  $f(x)$  在  $I$  上不一致连续, 则

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x', x''$ , 满足  $|x' - x''| < \delta$ , 但有  $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$ .



取  $\delta_1 = 1, \exists x'_1, x''_1 \in I, |x'_1 - x''_1| < 1, \text{有 } |f(x'_1) - f(x''_1)| \geq \varepsilon_0,$

取  $\delta_2 = \frac{1}{2}, \exists x'_2, x''_2 \in I, |x'_2 - x''_2| < \frac{1}{2}, \text{有 } |f(x'_2) - f(x''_2)| \geq \varepsilon_0,$

.....

取  $\delta_n = \frac{1}{n}, \exists x'_n, x''_n \in I, |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \text{有 } |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0,$

.....

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0,$  但是  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x'_n) - f(x''_n)] \neq 0,$  与所设条件矛盾. 所以  $f(x)$  在致连续.

例 11 证明  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1)$  上不一致连续.

证 取  $x_n = \frac{1}{2n\pi}, y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, n = 1, 2, \dots.$  虽然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0,$$

但是

$$\left| \sin \frac{1}{x_n} - \sin \frac{1}{y_n} \right| = 1 \not\rightarrow 0,$$

故由例 10 的结论推得  $\sin \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  上不一致连续.

函数在区间上的连续与一致连续这两个概念有着重要的差别.  $f$  在区间  $I$  上: 是指任给  $\varepsilon > 0,$  对每一点  $x \in I,$  都存在相应的正数  $\delta = \delta(\varepsilon, x),$  只要  $x' \in I$  且  $|x - x'| < \delta$  就有  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$  一般来说, 对于  $I$  上不同的点, 相应的正数  $\delta$  是不同的. 换说,  $\delta$  的取值除依赖于  $\varepsilon$  之外, 还与点  $x$  有关, 由此我们写  $\delta = \delta(\varepsilon, x)$  以表示  $\delta$  与  $\varepsilon$  的依赖关系. 如果能做到  $\delta$  只与  $\varepsilon$  有关, 而与  $x$  无关, 或者说存在适合于  $I$  上所有的公共的  $\delta,$  即  $\delta = \delta(\varepsilon),$  那么函数就不仅在  $I$  上连续, 而且是一致连续了.

所以,  $f$  在区间  $I$  上一致连续是  $f$  的又一个整体性质, 由它可推出  $f$  在  $I$  上每点都连续的这一局部性质 (只要在定义 2 中把  $x'$  看作定点, 把  $x''$  看作动点, 即得  $f$  在连续). 而从例 9 可见, 由  $f$  在区间  $I$  上每一点都连续, 并不能推出  $f$  在  $I$  上一致连续. 而, 对于定义在闭区间上的函数来说, 由它在每一点都连续却可推出在区间上的连续性, 即有如下重要定理:

**定理 4.9 (一致连续性定理)** 若函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f$  在  $[a, b]$  上致连续.

证 若不然, 存在  $\varepsilon_0 > 0,$  以及区间  $[a, b]$  上的点列  $\{x_n\}, \{y_n\},$  虽然  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$  但是

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

因为  $\{x_n\}$  有界, 所以由致密性定理,  $\{x_n\}$  有一个收敛的子列  $\{x_{n_k}\}.$  设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0,$  从而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} [(y_{n_k} - x_{n_k}) + x_{n_k}] = x_0,$$

又  $a \leq x_{n_k} \leq b,$  由极限的不等式性质推得  $a \leq x_0 \leq b,$  故  $f(x)$  在点  $x_0$  连续. 由归结原理



(7)式得

$$\varepsilon_0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

矛盾. □

**例 12** 设区间  $I_1$  的右端点为  $c \in I_1$ , 区间  $I_2$  的左端点也为  $c \in I_2$  ( $I_1, I_2$  可分别为有限或无限区间). 试按一致连续性的定义证明: 若  $f$  分别在  $I_1$  和  $I_2$  上一致连续, 则  $f$  在  $I = I_1 \cup I_2$  上也一致连续.

**证** 任给  $\varepsilon > 0$ , 由  $f$  在  $I_1$  和  $I_2$  上的一致连续性, 分别存在正数  $\delta_1$  和  $\delta_2$ , 使得对任何  $x', x'' \in I_1$ , 只要  $|x' - x''| < \delta_1$ , 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon; \quad (8)$$

又对任何  $x', x'' \in I_2$ , 只要  $|x' - x''| < \delta_2$ , 也有(8)式成立.

点  $x = c$  作为  $I_1$  的右端点,  $f$  在点  $c$  为左连续, 作为  $I_2$  的左端点,  $f$  在点  $c$  为右连续, 所以  $f$  在点  $c$  连续. 故对上述  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta_3 > 0$ , 当  $|x - c| < \delta_3$  时, 有

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

令  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ , 对任何  $x', x'' \in I$ ,  $|x' - x''| < \delta$ , 分别讨论以下两种情形:

(i)  $x', x''$  同时属于  $I_1$  或同时属于  $I_2$ , 则(8)式成立.

(ii)  $x', x''$  分属  $I_1$  与  $I_2$ , 设  $x' \in I_1, x'' \in I_2$ , 则

$$|x' - c| = c - x' < x'' - x' < \delta \leq \delta_3,$$

故由(9)式得  $|f(x') - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 同理得  $|f(x'') - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 从而也有(8)式成立. 这就证明了  $f$  在  $I$  上一致连续. □

## 习 题 4.2

1. 讨论复合函数  $f \circ g$  与  $g \circ f$  的连续性, 设

(1)  $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1 + x^2$ ;

(2)  $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = (1 - x^2)x$ .

2. 设  $f, g$  在点  $x_0$  连续, 证明:

(1) 若  $f(x_0) > g(x_0)$ , 则存在  $U(x_0; \delta)$ , 使其上有  $f(x) > g(x)$ ;

(2) 若在某  $U^\circ(x_0)$  上有  $f(x) > g(x)$ , 则  $f(x_0) \geq g(x_0)$ .

3. 设  $f, g$  在区间  $I$  上连续. 记

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}, G(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

证明  $F$  和  $G$  也都在  $I$  上连续.

提示: 利用第一章总练习题 1.

4. 设  $f$  为  $\mathbf{R}$  上连续函数, 常数  $c > 0$ . 记

$$F(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & |f(x)| \leq c, \\ c, & f(x) > c. \end{cases}$$

证明  $F$  在  $\mathbf{R}$  上连续.

提示:  $F(x) = \max\{-c, \min\{c, f(x)\}\}$ .



第四版被评为 2011 年度普通高等教育精品教材  
第一版荣获全国第一届高等学校优秀教材优秀奖



### 数字课程网站

网址: <http://abook.hep.com.cn/1210369>

<http://abook.hep.edu.cn/1210369>

数字课程账号 使用说明详见书内数字课程说明页

ISBN 978-7-04-050694-5



9 787040 506945 >

定价 44.80 元



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App