




“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

# 概率论与 数理统计教程

第三版

茆诗松 程依明 濮晓龙 编著

高等教育出版社

 鲸鱼书单



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材


# 概率论与 数理统计教程

第三版

茆诗松 程依明 濮晓龙 编著

高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。全书共八章，前四章为概率论部分，主要叙述各种概率分布及其性质，后四章为数理统计部分，主要叙述各种参数估计与假设检验。本次修订适当补充了数字资源(以符号标识)。

本书的编写从实例出发，图文并茂，通俗易懂，注重讲清楚基本概念与统计思想，强调各种方法的应用，适合初次接触概率统计的读者阅读。全书插图 100 多幅，例题 250 多道，习题 600 余道。

本书可供高等学校数学类专业与统计学专业作为教材使用，亦可供其他专业类似课程参考，也适合自学使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程 / 茆诗松, 程依明, 濮晓龙  
编著. --3 版. --北京: 高等教育出版社, 2019.11 (2020.4 重印)  
ISBN 978-7-04-051148-2

I. ①概… II. ①茆… ②程… ③濮… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 009658 号

策划编辑	李蕊	责任编辑	李蕊	特约编辑	高旭	封面设计	王凌波
版式设计	马云	插图绘制	于博	责任校对	王雨	责任印制	刘思涵

---

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a>
印 刷	肥城新华印刷有限公司		<a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>
开 本	787mm×1092mm 1/16		<a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>
印 张	30.5	版 次	2004 年 10 月第 1 版
字 数	670 千字		2019 年 11 月第 3 版
购书热线	010-58581118	印 次	2020 年 4 月第 2 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	59.00 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 51148-00

# 概率论与数理统计教程

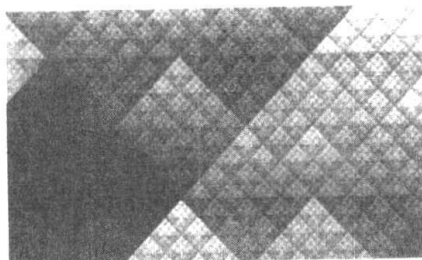
第三版

茆诗松 程依明 濮晓龙 编著

1. 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1225539>, 或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录, 进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号(20位密码, 刮开涂层可见), 或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



帮助中心



概率论与数理统计教程

第三版

概率论与数理统计数字课程与纸质教材一体化设计, 紧密配合。数字课程提供数学史料、拓展阅读类数字资源, 充分运用多种媒体资源, 丰富了知识的呈现形式, 拓展了教材内容, 在提升课程教学效果的同时, 为学生学习提供思维与探索的空间。

用户名:  密码:  验证码:  2592 忘记密码?  注册 记住我(30天内免登录)

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至[abook@hep.com.cn](mailto:abook@hep.com.cn)。



扫描二维码  
下载Abook应用



概率论简史



数理统计简史

<http://abook.hep.com.cn/1225539>

第一章 随机事件与概率 .....	1
§ 1.1 随机事件及其运算 .....	1
1.1.1 随机现象 .....	1
1.1.2 样本空间 .....	1
1.1.3 随机事件 .....	2
1.1.4 随机变量 .....	3
1.1.5 事件间的关系 .....	4
1.1.6 事件间的运算 .....	5
1.1.7 事件域 .....	7
习题 1.1 .....	10
§ 1.2 概率的定义及其确定方法 .....	11
1.2.1 概率的公理化定义 .....	11
1.2.2 排列与组合公式 .....	12
1.2.3 确定概率的频率方法 .....	13
1.2.4 确定概率的古典方法 .....	15
1.2.5 确定概率的几何方法 .....	22
1.2.6 确定概率的主观方法 .....	26
习题 1.2 .....	27
§ 1.3 概率的性质 .....	28
1.3.1 概率的可加性 .....	29
1.3.2 概率的单调性 .....	30
1.3.3 概率的加法公式 .....	31
1.3.4 概率的连续性 .....	33
习题 1.3 .....	35
§ 1.4 条件概率 .....	36
1.4.1 条件概率的定义 .....	36
1.4.2 乘法公式 .....	38
1.4.3 全概率公式 .....	40
1.4.4 贝叶斯公式 .....	43
习题 1.4 .....	45
§ 1.5 独立性 .....	47
1.5.1 两个事件的独立性 .....	47
1.5.2 多个事件的相互独立性 .....	48
1.5.3 试验的独立性 .....	52

习题 1.5 .....	52
<b>第二章 随机变量及其分布</b> .....	<b>55</b>
§ 2.1 随机变量及其分布 .....	55
2.1.1 随机变量的概念 .....	55
2.1.2 随机变量的分布函数 .....	56
2.1.3 离散随机变量的概率分布列 .....	59
2.1.4 连续随机变量的概率密度函数 .....	62
习题 2.1 .....	67
§ 2.2 随机变量的数学期望 .....	69
2.2.1 数学期望的概念 .....	69
2.2.2 数学期望的定义 .....	70
2.2.3 数学期望的性质 .....	73
习题 2.2 .....	75
§ 2.3 随机变量的方差与标准差 .....	77
2.3.1 方差与标准差的定义 .....	77
2.3.2 方差的性质 .....	79
2.3.3 切比雪夫不等式 .....	80
习题 2.3 .....	81
§ 2.4 常用离散分布 .....	82
2.4.1 二项分布 .....	82
2.4.2 泊松分布 .....	85
2.4.3 超几何分布 .....	90
2.4.4 几何分布与负二项分布 .....	91
习题 2.4 .....	93
§ 2.5 常用连续分布 .....	94
2.5.1 正态分布 .....	94
2.5.2 均匀分布 .....	99
2.5.3 指数分布 .....	101
2.5.4 伽马分布 .....	102
2.5.5 贝塔分布 .....	104
习题 2.5 .....	107
§ 2.6 随机变量函数的分布 .....	109
2.6.1 离散随机变量函数的分布 .....	109
2.6.2 连续随机变量函数的分布 .....	110
习题 2.6 .....	114
§ 2.7 分布的其他特征数 .....	116
2.7.1 $k$ 阶矩 .....	116
2.7.2 变异系数 .....	117
2.7.3 分位数 .....	117
2.7.4 中位数 .....	119
2.7.5 偏度系数 .....	120
2.7.6 峰度系数 .....	121
习题 2.7 .....	123

<b>第三章 多维随机变量及其分布</b> .....	125
§ 3.1 多维随机变量及其联合分布 .....	125
3.1.1 多维随机变量 .....	125
3.1.2 联合分布函数 .....	125
3.1.3 联合分布列 .....	127
3.1.4 联合密度函数 .....	128
3.1.5 常用多维分布 .....	130
习题 3.1 .....	134
§ 3.2 边际分布与随机变量的独立性 .....	136
3.2.1 边际分布函数 .....	136
3.2.2 边际分布列 .....	137
3.2.3 边际密度函数 .....	138
3.2.4 随机变量间的独立性 .....	140
习题 3.2 .....	143
§ 3.3 多维随机变量函数的分布 .....	145
3.3.1 多维离散随机变量函数的分布 .....	145
3.3.2 最大值与最小值的分布 .....	147
3.3.3 连续场合的卷积公式 .....	149
3.3.4 变量变换法 .....	151
习题 3.3 .....	154
§ 3.4 多维随机变量的特征数 .....	155
3.4.1 多维随机变量函数的数学期望 .....	156
3.4.2 数学期望与方差的运算性质 .....	157
3.4.3 协方差 .....	159
3.4.4 相关系数 .....	162
3.4.5 随机向量的数学期望向量与协方差矩阵 .....	168
习题 3.4 .....	169
§ 3.5 条件分布与条件期望 .....	173
3.5.1 条件分布 .....	173
3.5.2 条件数学期望 .....	179
习题 3.5 .....	183
<b>第四章 大数定律与中心极限定理</b> .....	186
§ 4.1 随机变量序列的两种收敛性 .....	186
4.1.1 依概率收敛 .....	186
4.1.2 按分布收敛、弱收敛 .....	188
习题 4.1 .....	190
§ 4.2 特征函数 .....	192
4.2.1 特征函数的定义 .....	192
4.2.2 特征函数的性质 .....	194
4.2.3 特征函数唯一决定分布函数 .....	198
习题 4.2 .....	201
§ 4.3 大数定律 .....	202
4.3.1 伯努利大数定律 .....	202

4.3.2	常用的几个大数定律 .....	205
习题 4.3	.....	209
§ 4.4	中心极限定理 .....	210
4.4.1	独立随机变量和 .....	210
4.4.2	独立同分布下的中心极限定理 .....	212
4.4.3	二项分布的正态近似 .....	214
4.4.4	独立不同分布下的中心极限定理 .....	217
习题 4.4	.....	220
<b>第五章</b>	<b>统计量及其分布</b> .....	<b>223</b>
§ 5.1	总体与样本 .....	223
5.1.1	总体与个体 .....	223
5.1.2	样本 .....	225
习题 5.1	.....	226
§ 5.2	样本数据的整理与显示 .....	227
5.2.1	经验分布函数 .....	227
5.2.2	频数频率表 .....	228
5.2.3	样本数据的图形显示 .....	229
习题 5.2	.....	231
§ 5.3	统计量及其分布 .....	232
5.3.1	统计量与抽样分布 .....	232
5.3.2	样本均值及其抽样分布 .....	233
5.3.3	样本方差与样本标准差 .....	236
5.3.4	样本矩及其函数 .....	237
5.3.5	次序统计量及其分布 .....	239
5.3.6	样本分位数与样本中位数 .....	243
5.3.7	五数概括与箱线图 .....	244
习题 5.3	.....	246
§ 5.4	三大抽样分布 .....	249
5.4.1	$\chi^2$ 分布(卡方分布) .....	250
5.4.2	$F$ 分布 .....	252
5.4.3	$t$ 分布 .....	254
习题 5.4	.....	258
§ 5.5	充分统计量 .....	259
5.5.1	充分性的概念 .....	259
5.5.2	因子分解定理 .....	262
习题 5.5	.....	264
<b>第六章</b>	<b>参数估计</b> .....	<b>267</b>
§ 6.1	点估计的概念与无偏性 .....	267
6.1.1	点估计及无偏性 .....	267
6.1.2	有效性 .....	270
习题 6.1	.....	271
§ 6.2	矩估计及相合性 .....	272
6.2.1	替换原理和矩法估计 .....	272

6.2.2	概率函数已知时未知参数的矩估计	273
6.2.3	相合性	274
	习题 6.2	276
§ 6.3	最大似然估计与 EM 算法	277
6.3.1	最大似然估计	277
6.3.2	EM 算法	280
6.3.3	渐近正态性	282
	习题 6.3	285
§ 6.4	最小方差无偏估计	286
6.4.1	均方误差	286
6.4.2	一致最小方差无偏估计	287
6.4.3	充分性原则	289
6.4.4	克拉默-拉奥不等式	290
	习题 6.4	293
§ 6.5	贝叶斯估计	294
6.5.1	统计推断的基础	294
6.5.2	贝叶斯公式的密度函数形式	295
6.5.3	贝叶斯估计	296
6.5.4	共轭先验分布	298
	习题 6.5	299
§ 6.6	区间估计	300
6.6.1	区间估计的概念	300
6.6.2	枢轴量法	302
6.6.3	单个正态总体参数的置信区间	303
6.6.4	大样本置信区间	306
6.6.5	样本量的确定	307
6.6.6	两个正态总体下的置信区间	308
	习题 6.6	312
<b>第七章</b>	<b>假设检验</b>	<b>314</b>
§ 7.1	假设检验的基本思想与概念	314
7.1.1	假设检验问题	314
7.1.2	假设检验的基本步骤	315
7.1.3	检验的 $p$ 值	319
	习题 7.1	320
§ 7.2	正态总体参数假设检验	321
7.2.1	单个正态总体均值的检验	321
7.2.2	假设检验与置信区间的关系	326
7.2.3	两个正态总体均值差的检验	326
7.2.4	成对数据检验	329
7.2.5	正态总体方差的检验	331
	习题 7.2	333
§ 7.3	其他分布参数的假设检验	337
7.3.1	指数分布参数的假设检验	337

7.3.2	比率 $p$ 的检验	337
7.3.3	大样本检验	338
	习题 7.3	340
§ 7.4	似然比检验与分布拟合检验	341
7.4.1	似然比检验的思想	341
7.4.2	分类数据的 $\chi^2$ 拟合优度检验	343
7.4.3	分布的 $\chi^2$ 拟合优度检验	345
7.4.4	列联表的独立性检验	348
	习题 7.4	350
§ 7.5	正态性检验	352
7.5.1	正态概率纸	352
7.5.2	$W$ 检验	355
7.5.3	EP 检验	359
	习题 7.5	360
§ 7.6	非参数检验	360
7.6.1	游程检验	360
7.6.2	符号检验	363
7.6.3	秩和检验	366
	习题 7.6	370
<b>第八章</b>	<b>方差分析与回归分析</b>	<b>373</b>
§ 8.1	方差分析	373
8.1.1	问题的提出	373
8.1.2	单因子方差分析的统计模型	373
8.1.3	平方和分解	375
8.1.4	检验方法	377
8.1.5	参数估计	379
8.1.6	重复数不等情形	381
	习题 8.1	383
§ 8.2	多重比较	385
8.2.1	水平均值差的置信区间	385
8.2.2	多重比较问题	386
8.2.3	重复数相等场合的 T 法	386
8.2.4	重复数不等场合的 S 法	388
	习题 8.2	389
§ 8.3	方差齐性检验	390
8.3.1	哈特利检验	390
8.3.2	巴特利特检验	392
8.3.3	修正的巴特利特检验	394
	习题 8.3	395
§ 8.4	一元线性回归	396
8.4.1	变量间的两类关系	396
8.4.2	一元线性回归模型	396
8.4.3	回归系数的最小二乘估计	398

8.4.4	回归方程的显著性检验	400
8.4.5	估计与预测	406
	习题 8.4	411
§ 8.5	一元非线性回归	413
8.5.1	确定可能的函数形式	414
8.5.2	参数估计	416
8.5.3	曲线回归方程的比较	417
	习题 8.5	419
<b>附表</b>		420
表 1	泊松分布函数表	420
表 2	标准正态分布函数表	422
表 3	$\chi^2$ 分布分位数 $\chi_p^2(n)$ 表	424
表 4	$t$ 分布分位数 $t_p(n)$ 表	426
表 5.1	$F$ 分布 0.90 分位数 $F_{0.90}(f_1, f_2)$ 表	428
表 5.2	$F$ 分布 0.95 分位数 $F_{0.95}(f_1, f_2)$ 表	429
表 5.3	$F$ 分布 0.975 分位数 $F_{0.975}(f_1, f_2)$ 表	430
表 5.4	$F$ 分布 0.99 分位数 $F_{0.99}(f_1, f_2)$ 表	431
表 6	正态性检验统计量 $W$ 的系数 $a_i(n)$ 数值表	432
表 7	正态性检验统计量 $W$ 的 $\alpha$ 分位数 $W_\alpha$ 表	436
表 8	$t$ 化极差统计量的分位数 $q_{1-\alpha}(r, f)$ 表	437
表 9	检验相关系数的临界值表	440
表 10	统计量 $H$ 的分位数 $H_{1-\alpha}(r, f)$ 表	441
表 11	检验统计量 $T_{EP}$ 的 $1-\alpha$ 分位数 $T_{1-\alpha, EP}(n)$ 表	442
表 12	游程总数检验临界值表	442
表 13	威尔科克森符号秩和检验统计量的分位数表	443
表 14	威尔科克森秩和检验临界值表	444
	习题参考答案	447
	参考文献	466

出的结果与其他两人不一样,那么由他付账;如果三个人掷出的结果是一样的,那么就重新掷,一直这样下去,直到确定了由谁来付账.求以下事件的概率:

- (1) 进行到了第 2 轮确定了由谁来付账;
- (2) 进行了 3 轮还没有确定付账人.

12. 从一个装有  $m$  个白球、 $n$  个黑球的袋中有返回地摸球,直到摸到白球时停止.试求取出黑球数的期望.

13. 某种产品上的缺陷数  $X$  服从下列分布列:

$$P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

求此种产品上的平均缺陷数.

14. 设随机变量  $X$  的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

以  $Y$  表示对  $X$  的三次独立重复观察中事件  $\{X \leq 1/2\}$  出现的次数,试求  $P(Y=2)$ .

15. 某产品的不合格品率为 0.1,每次随机抽取 10 件进行检验,若发现其中不合格品数多于 1,就去调整设备.若检验员每天检验 4 次,试问每天平均要调整几次设备?

16. 一个系统由多个元件组成,各个元件是否正常工作是相互独立的,且各个元件正常工作的概率为  $p$ .若在系统中至少有一半的元件正常工作,那么整个系统就有效.问  $p$  取何值时,5 个元件的系统比 3 个元件的系统更有可能有效?

17. 设随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布,试证明

$$E(X^n) = \lambda E[(X+1)^{n-1}],$$

利用此结果计算  $E(X^3)$ .

18. 令  $X(n, p)$  表示服从二项分布  $b(n, p)$  的随机变量,试证明:

$$P(X(n, p) \leq i) = 1 - P(X(n, 1-p) \leq n-i-1).$$

19. 设随机变量  $X$  服从参数为  $p$  的几何分布,试证明:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{-p \ln p}{1-p}$$

20. 设随机变量  $X \sim b(n, p)$ , 试证明:

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

## § 2.5 常用连续分布

在连续分布场合,密度函数与分布函数是可以相互导出的,含有相同信息,各有各的用处,但在图形上密度函数对各种连续分布的特性能得到直观显示.如正态与偏态、单峰与平顶都是依密度函数图形命名的,因而人们对密度函数更为注意.

### 2.5.1 正态分布

正态分布是概率论与数理统计中最重要的一个分布,高斯(Gauss, 1777—1855)在研究误差理论时首先用正态分布来刻画误差的分布,所以正态分布又称为高斯分布.

本书第四章的中心极限定理表明:一个随机变量如果是由大量微小的、独立的随机因素的叠加结果,那么这个变量一般都可以认为服从正态分布.因此很多随机变量可以用正态分布描述或近似描述,譬如测量误差、产品重量、人的身高、年降雨量等都可用正态分布描述.

## 一、正态分布的密度函数和分布函数

若随机变量  $X$  的密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.5.1)$$

则称  $X$  服从正态分布,称  $X$  为正态变量,记作  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . 其中参数  $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$ . 其密度函数  $p(x)$  的图形如图 2.5.1(a) 所示.  $p(x)$  是一条钟形曲线,中间高、两边低、左右关于  $x = \mu$  对称,  $\mu$  是正态分布的中心,且在  $x = \mu$  附近取值的可能性大,在两侧取值的可能性小.  $\mu \pm \sigma$  是该曲线的拐点.

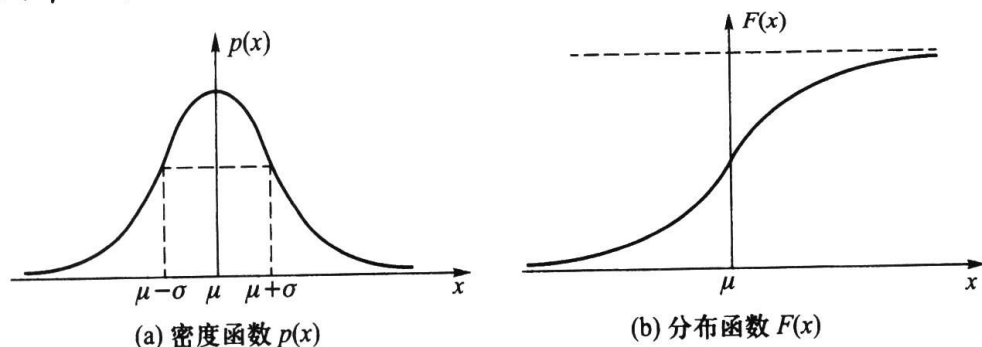


图 2.5.1 正态分布

正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (2.5.2)$$

它是一条光滑上升的 S 形曲线,见图 2.5.1(b).

图 2.5.2 给出了在  $\mu$  和  $\sigma$  变化时,相应正态密度曲线的变化情况.

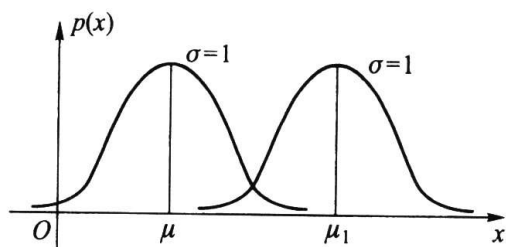
- 从图 2.5.2(a) 中可以看出:如果固定  $\sigma$ , 改变  $\mu$  的值,则图形沿  $x$  轴平移,而不改变其形状.也就是说正态密度函数的位置由参数  $\mu$  所确定,因此亦称  $\mu$  为位置参数.
- 从图 2.5.2(b) 中可以看出:如果固定  $\mu$ , 改变  $\sigma$  的值,则分布的位置不变,但  $\sigma$  愈小,曲线呈高而瘦,分布较为集中;  $\sigma$  愈大,曲线呈矮而胖,分布较为分散.也就是说正态密度函数的尺度由参数  $\sigma$  所确定,因此称  $\sigma$  为尺度参数.

## 二、标准正态分布

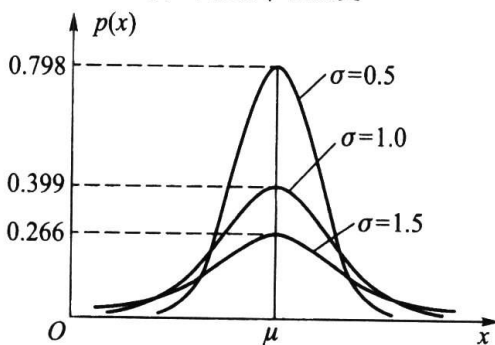
称  $\mu = 0, \sigma = 1$  时的正态分布  $N(0, 1)$  为标准正态分布.

通常记标准正态变量为  $U$ , 记标准正态分布的密度函数为  $\varphi(u)$ , 分布函数为  $\Phi(u)$ , 即

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad -\infty < u < \infty,$$



(a)  $\sigma$ 固定,  $\mu$ 值改变



(b)  $\mu$ 固定,  $\sigma$ 值改变

图 2.5.2 正态密度函数

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < u < \infty.$$

由于标准正态分布的分布函数不含任何未知参数,故其值  $\Phi(u) = P(U \leq u)$  完全可以算出,附表 2 对  $u \geq 0$  给出了  $\Phi(u)$  的值.对于  $\Phi(u)$  有

- $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$ .
- $P(U > u) = 1 - \Phi(u)$ .
- $P(a < U < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ .
- $P(|U| < c) = 2\Phi(c) - 1$  ( $c \geq 0$ ).

这些等式都不难推得.

**例 2.5.1** 设  $U \sim N(0, 1)$ , 利用附表 2, 求下列事件的概率:

- (1)  $P(U < 1.52) = \Phi(1.52) = 0.9357$ .
- (2)  $P(U > 1.52) = 1 - \Phi(1.52) = 1 - 0.9357 = 0.0643$ .
- (3)  $P(U < -1.52) = 1 - \Phi(1.52) = 0.0643$ .
- (4)  $P(-0.75 \leq U \leq 1.52) = \Phi(1.52) - \Phi(-0.75)$   
 $= \Phi(1.52) - [1 - \Phi(0.75)]$   
 $= 0.9357 - 1 + 0.7734 = 0.7091$ .
- (5)  $P(|U| \leq 1.52) = 2\Phi(1.52) - 1 = 2 \times 0.9357 - 1 = 0.8714$ .

### 三、正态变量的标准化

正态分布有一个家族

$$\mathcal{P} = \{N(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0\},$$

标准正态分布  $N(0, 1)$  是其一个中心成员.以下定理说明:一般正态变量都可以通过一个线性变换(标准化)化成标准正态变量.因此与正态变量有关的一切事件的概率都可通过查标准正态分布函数表获得.可见标准正态分布  $N(0, 1)$  对一般正态分布  $N(\mu,$

$\sigma^2$ ) 的计算起着关键的作用.

**定理 2.5.1** 若随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $U = (X - \mu) / \sigma \sim N(0, 1)$ .

**证明** 记  $X$  与  $U$  的分布函数分别为  $F_X(x)$  与  $F_U(u)$ , 则由分布函数的定义知

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq u\right) = P(X \leq \mu + \sigma u) = F_X(\mu + \sigma u).$$

由于正态分布函数是严格单调增函数, 且处处可导, 因此若记  $X$  与  $U$  的密度函数分别为  $p_X(x)$  与  $p_U(u)$ , 则有

$$p_U(u) = \frac{d}{du} F_X(\mu + \sigma u) = p_X(\mu + \sigma u) \cdot \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2},$$

由此得

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

由以上定理, 我们马上可以得到一些在实际中有用的计算公式, 若随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则

$$P(X \leq c) = \Phi\left(\frac{c - \mu}{\sigma}\right). \quad (2.5.3)$$

$$P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right). \quad (2.5.4)$$

**例 2.5.2** 设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(108, 3^2)$ , 试求:

- (1)  $P(102 < X < 117)$ ;
- (2) 常数  $a$ , 使得  $P(X < a) = 0.95$ .

**解** 利用公式 (2.5.4) 及查附表 2 得

$$\begin{aligned} (1) \quad P(102 < X < 117) &= \Phi\left(\frac{117 - 108}{3}\right) - \Phi\left(\frac{102 - 108}{3}\right) \\ &= \Phi(3) - \Phi(-2) = \Phi(3) + \Phi(2) - 1 \\ &= 0.9987 + 0.9772 - 1 = 0.9759. \end{aligned}$$

(2) 由

$$P(X < a) = \Phi\left(\frac{a - 108}{3}\right) = 0.95, \quad \text{或} \quad \Phi^{-1}(0.95) = \frac{a - 108}{3},$$

其中  $\Phi^{-1}$  为  $\Phi$  的反函数. 从附表 2 由里向外反查得

$$\Phi(1.64) = 0.9495, \quad \Phi(1.65) = 0.9505,$$

再用线性内插法可得  $\Phi(1.645) = 0.95$ , 即  $\Phi^{-1}(0.95) = 1.645$ , 故

$$\frac{a - 108}{3} = 1.645,$$

从中解得  $a = 112.935$ .

从上例我们可以看出, 有些场合下给定  $\Phi(x)$  的值  $p$ , 可以从附表 2 中由里向外反查表来得到  $x_p$ , 使  $\Phi(x_p) = p$  或  $\Phi^{-1}(p) = x_p$ , 这时  $x_p$  称为标准正态分布的  $p$  分位数. 在上例中 1.645 就是标准正态分布的 0.95 分位数, 更一般叙述见 2.7.3 节. 分位数在统计

中被大量使用.

**例 2.5.3** 在考试中,如果考生的成绩  $X$  近似地服从正态分布,则通常认为这次考试(就合理地划分考生成绩的等级而言)是正常的.教师经常把分数超过  $\mu+\sigma$  的评为 A 等,分数在  $\mu$  到  $\mu+\sigma$  之间的评为 B 等,分数在  $\mu-\sigma$  到  $\mu$  之间的评为 C 等,分数在  $\mu-2\sigma$  到  $\mu-\sigma$  之间的评为 D 等,分数在  $\mu-2\sigma$  以下的评为 F 等.由此可计算得:

$$P(X \geq \mu + \sigma) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq 1\right) = 1 - \Phi(1) \approx 0.1587,$$

$$P(\mu \leq X < \mu + \sigma) = P\left(0 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} < 1\right) = \Phi(1) - \Phi(0) \approx 0.3413,$$

$$P(\mu - \sigma \leq X < \mu) = P\left(-1 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} < 0\right) = \Phi(0) - \Phi(-1) \approx 0.3413,$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X < \mu - \sigma) = P\left(-2 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} < -1\right) = \Phi(-1) - \Phi(-2) \approx 0.1359,$$

$$P(X < \mu - 2\sigma) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < -2\right) = \Phi(-2) \approx 0.0228.$$

这说明:用这种方法划分成绩的等级,获得 A 等的约占 16%,B 等的约占 34%,C 等的约占 34%,D 等的约占 14%,F 等的约占 2%.

#### 四、正态分布的数学期望与方差

设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 由于  $U = (X - \mu) / \sigma \sim N(0, 1)$ , 所以  $U$  的数学期望为

$$E(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

注意到上述积分的被积函数为一个奇函数,所以其积分值等于 0,即  $E(U) = 0$ . 又因为  $X = \mu + \sigma U$ , 所以由数学期望的性质得

$$E(X) = \mu + \sigma \times 0 = \mu.$$

也就是说,正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  中的  $\mu$  为数学期望.

又因为

$$\begin{aligned} \text{Var}(U) &= E(U^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u d(-e^{-\frac{u^2}{2}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -ue^{-\frac{u^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1, \end{aligned}$$

且  $X = \mu + \sigma U$ , 所以由方差的性质得

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(\mu + \sigma U) = \sigma^2.$$

这说明,正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  中另一个参数  $\sigma^2$  就是  $X$  的方差.

在求正态分布的数学期望和方差过程中,用到了一种变换:令  $U = (X - \mu) / \sigma$ , 则

$E(U) = 0, \text{Var}(U) = 1$ . 这个变换在很多场合也可使用, 也就是对任意非正态随机变量  $X$ , 如果  $X$  的数学期望  $E(X)$  和方差  $\text{Var}(X)$  存在, 则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$$

为  $X$  的标准化随机变量, 且可得

$$E(X^*) = 0, \quad \text{Var}(X^*) = 1.$$

## 五、正态分布的 $3\sigma$ 原则

设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < k\right) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$$

当  $k = 1, 2, 3$  时, 有

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= 2\Phi(1) - 1 = 0.6826, \\ P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) &= 2\Phi(2) - 1 = 0.9545, \\ P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) &= 2\Phi(3) - 1 = 0.9973. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

这是正态分布的重要性质. 假如某随机变量取值的概率近似满足(2.5.5), 则可认为这个随机变量近似服从正态分布; 假如(2.5.5)三式中有一个偏差较大, 则可以认为这个随机变量不服从正态分布. 这就是正态分布的  $3\sigma$  原则, 这个原则在  $X$  的观察值较多(成百上千个)时, 常用于判断  $X$  的分布是否近似服从正态分布.

在生产中某产品的质量要求常规定其上、下控制限, 若上、下控制限能覆盖区间  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ , 则称该生产过程受控制, 并称其比值

$$C_p = \frac{\text{上控制限} - \text{下控制限}}{6\sigma}$$

为过程能力指数. 当  $C_p < 1$  时, 认为生产过程不足; 当  $C_p \geq 1.33$  时, 认为生产过程正常; 当  $C_p$  为其他值时, 常认为生产过程不稳定, 需要改进.

### 2.5.2 均匀分布

#### 一、均匀分布的密度函数和分布函数

前面曾以例子形式说明过均匀分布, 这里给出一般的叙述: 若随机变量  $X$  的密度函数(见图 2.5.3(a))为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{2.5.6}$$

则称  $X$  服从区间  $(a, b)$  上的均匀分布, 记作  $X \sim U(a, b)$ , 其分布函数(见图 2.5.3(b))为