"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

全国优秀教材二等奖

数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社

全国优秀教材
二等奖

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材、普通高等教育“十一五”国家级规划教材和面向21世纪课程教材，主要内容包括实数集与函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数和微分、微分中值定理及其应用、 实数的完备性、不定积分、定积分、定积分的应用、反常积分等，附录为实数理论和积分表，书后附微积分学简史。

本次修订是在第四版的基础上对一些内容进行适当调整，使教材逻辑性更合理，并适当补充数字资源。第五版仍旧保持前四版“内容选取适当，深入浅出，易教易学，可读性强”的特点。.

本书可作为高等学校数学和其他相关专业的教材使用。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析. 上册 / 华东师范大学数学科学学院编. --5版. --北京:高等教育出版社,2019.5(2025.5重印)
ISBN 978-7-04-050694-5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①华… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第229064号

策划编辑 兰莹莹 李 蕊　　责任编辑 兰莹莹　　封面设计 王凌波　　版式设计 杜微言
插图绘制 于 博　　责任校对 李大鹏　　责任印制 耿 轩

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	20.25	版　　次	1981年4月第1版
字　　数	440千字		2019年5月第5版
购书热线	010-58581118	印　　次	2025年5月第13次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	44.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 50694-00

目 录

7

从物理学知道，在不计摩擦力的情形下，当桶内水位高度为 $h-x$ 时，水从孔中流出的流速（单位时间内流过单位截面积的流量）为

$$v=\sqrt{2g(h-x)},$$

其中 g 为重力加速度.

设在很小一段时间 $\mathrm{d}t$ 内，桶中液面降低的微小量为 $\mathrm{d}x$，它们之间应满足

$$\pi R^2\mathrm{d}x=v\pi r^2\mathrm{d}t,$$

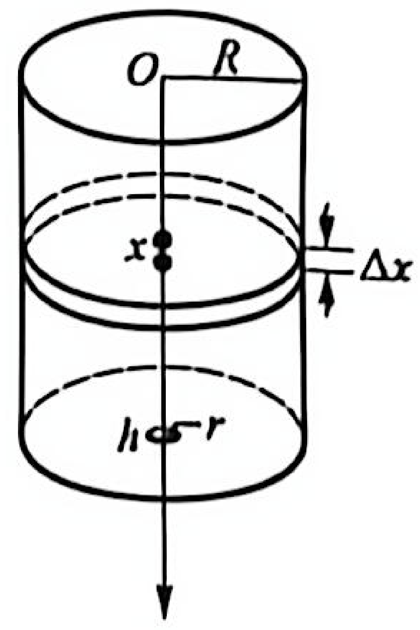

图 11-2

由此则有

$$\mathrm{d}t=\frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}}\mathrm{d}x, x\in[0,h).$$

所以流完一桶水所需时间在形式上亦可写成“积分”：

$$t_f=\int_0^h\frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}}\mathrm{d}x.$$

但是在这里因为被积函数是 $[0,h)$ 上的无界函数，所以它的确切含义应该是

$$\begin{aligned}t_f&=\lim_{u\to h^-}\int_0^u\frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}}\mathrm{d}x\\&=\lim_{u\to h^-}\sqrt{\frac{2}{g}}\cdot\frac{R^2}{r^2}(\sqrt{h}-\sqrt{h-u})\\&=\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{R}{r}\right)^2.\end{aligned}$$ □

相对于以前所讲的定积分（不妨称之为**正常积分**）而言，例 1 和例 2 分别提出了两类**反常积分**.

二、两类反常积分的定义

定义 1 设函数 f 定义在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上，且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积. 如果存在极限

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x=J, \tag{1}$$

则称此极限 J 为函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上的**无穷限反常积分**（简称**无穷积分**），记作

$$J=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x, \tag{1'}$$

并称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**. 如果极限 (1) 不存在，为方便起见，亦称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

类似地，可定义 f 在 $(-\infty,b]$ 上的无穷积分：

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

对于 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分，用前面两种无穷积分来定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x, \tag{3}$$

其中 a 为任一实数.当且仅当等号右边两个无穷积分都收敛时,它才是收敛的.

注 1 无穷积分(3)的收敛性与收敛时的值,都和实数 a 的选取无关.

注 2 由于无穷积分(3)是由(1)、(2)两类无穷积分来定义的,因此,f 在任何有限区间 $[v,u]\subset(-\infty,+\infty)$ 上,首先必须是可积的.

注 3 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的几何意义是:若 f 在 $[a,+\infty)$ 上为非负连续函数,则图 11-3 中介于曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a$ 以及 x 轴之间那一块向右无限延伸的阴影区域有面积 J.

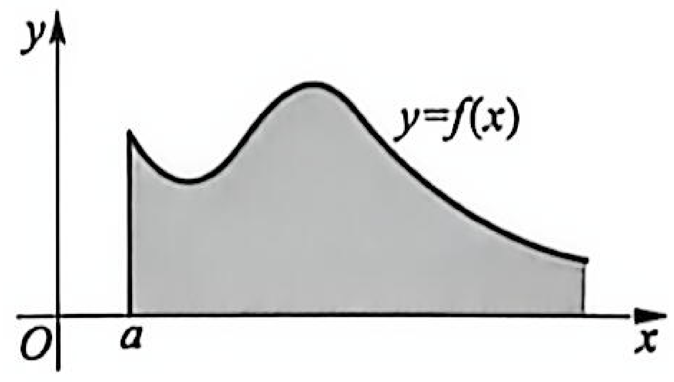

图 11-3

例 3 讨论无穷积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\tag{4}$$

的敛散性.

解 由于

$$\int_1^u\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}(u^{1-p}-1), & p\neq 1,\\ \ln u, & p=1,\end{cases}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\int_1^u\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$$

因此无穷积分(4)当 $p>1$ 时收敛,其值为 $\dfrac{1}{p-1}$;而当 $p\leqslant 1$ 时发散于 $+\infty$. □

从图 11-4 看到,例 3 的结论是很直观的:p 的值越大,曲线 $y=\dfrac{1}{x^p}$ 当 $x>1$ 时越靠近 x 轴,从而曲线下方的阴影区域存在有限面积的可能性也就越大.

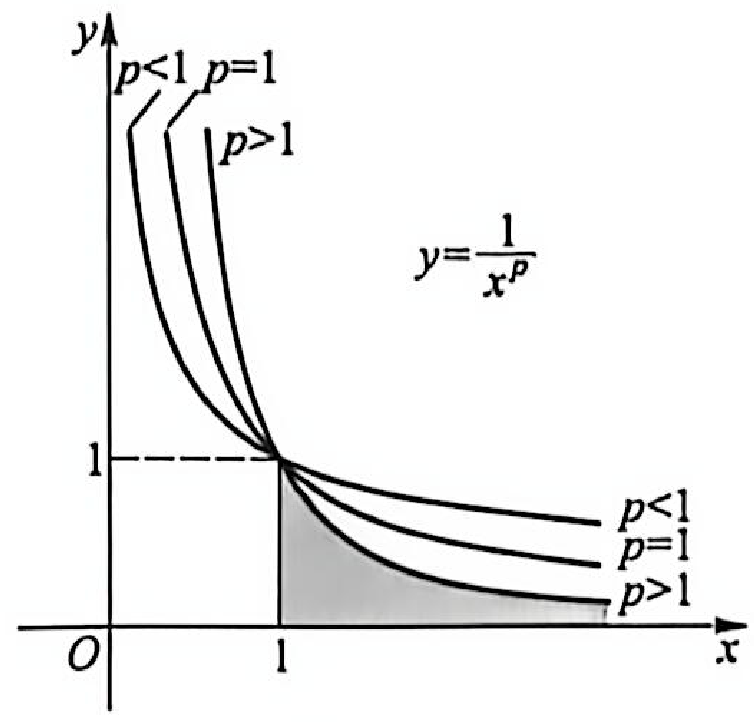

图 11-4

例 4 讨论下列无穷积分的敛散性:

1) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$; 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 1) 由于无穷积分是通过变限定积分的极限来定义的,因此有关定积分的换元积分法和分部积分法一般都可引用到无穷积分中来.对于本例来说,就有

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p}.$$

从例 3 知道,该无穷积分当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leqslant 1$ 时发散.

2) 任取实数 a,讨论如下两个无穷积分:

$$\int_{-\infty}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\quad 和\quad \int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

由于

$$\lim_{u\to-\infty}\int_u^a \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{u\to-\infty}(\arctan a - \arctan u) = \arctan a + \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{v\to+\infty}\int_a^v \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{v\to+\infty}(\arctan v - \arctan a) = \frac{\pi}{2} - \arctan a,$$

因此这两个无穷积分都收敛.由定义 1,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi. \qquad \square$$

注　由于上述结果与 a 无关,因此若取 $a=0$,则可使计算过程更简洁些.

定义 2　设函数 f 定义在区间 $(a,b]$ 上,在点 a 的任一右邻域上无界,但在任何内闭区间 $[u,b]\subset(a,b]$ 上有界且可积.如果存在极限

$$\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x = J, \tag{5}$$

则称此极限为**无界函数 f 在 $(a,b]$ 上的反常积分**,记作

$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5'}$$

并称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**.如果极限(5)不存在,这时也说反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**.

在定义 2 中,被积函数 f 在点 a 近旁是无界的,这时点 a 称为 f 的**瑕点**,而无界函数反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 又称为**瑕积分**.

类似地,可定义瑕点为 b 时的瑕积分:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x.$$

其中 f 在 $[a,b)$ 有定义,在点 b 的任一左邻域上无界,但在任何 $[a,u]\subset[a,b)$ 上可积.

若 f 的瑕点 $c\in(a,b)$,则定义瑕积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{u\to c^-}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{v\to c^+}\int_v^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6}$$

其中 f 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上有定义,在点 c 的任一邻域上无界,但在任何 $[a,u]\subset[a,c)$ 和 $[v,b]\subset(c,b]$ 上都可积.当且仅当(6)式右边两个瑕积分都收敛时,左边的瑕积分才是收敛的.

又若 a,b 两点都是 f 的瑕点,而 f 在任何 $[u,v]\subset(a,b)$ 上可积,这时定义瑕积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{u\to a^+}\int_u^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{v\to b^-}\int_c^v f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{7}$$

其中 c 为 (a,b) 上任一实数.同样地,当且仅当(7)式右边两个瑕积分都收敛时,左边的瑕积分才是收敛的.

例 5　计算瑕积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的值.

解 被积函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[0,1)$ 上连续，从而在任何 $[0,u]\subset[0,1)$ 上可积，$=1$ 为其瑕点.依定义 2 求得

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{u\to1^-}\int_0^u \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{u\to1^-}\arcsin u=\frac{\pi}{2}.$$

□

例 6 讨论瑕积分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}(q>0) \tag{8}$$

的收敛性.

解 被积函数在 $(0,1]$ 上连续，$x=0$ 为其瑕点.由于

$$\int_u^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-q}(1-u^{1-q}), & q\neq 1,\\ -\ln u, & q=1\end{cases}(0<u<1),$$

故当 $0<q<1$ 时，瑕积分(8)收敛，且

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}=\lim_{u\to0^+}\int_u^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}=\frac{1}{1-q};$$

而当 $q\geqslant 1$ 时，瑕积分(8)发散于 $+\infty$.

□

上述结论在图 11-4 中同样能获得直观的反映.

如果把例 3 与例 6 联系起来，考察反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}(p>0). \tag{9}$$

我们定义

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}+\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p},$$

它当且仅当右边的瑕积分和无穷积分都收敛时才收敛.但由例 3 与例 6 的结果可知，这两个反常积分不能同时收敛，故反常积分(9)对任何实数 p 都是发散的.

习 题 11.1

1. 讨论下列无穷积分是否收敛？若收敛，则求其值：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$； (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$； (4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}$；

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$； (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$；

(7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{x}\sin x\mathrm{d}x$； (8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. 讨论下列瑕积分是否收敛？若收敛，则求其值：

(1) $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$； (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$；

第四版被评为 2011 年度普通高等教育精品教材

第一版荣获全国第一届高等学校优秀教材优秀奖

数字课程网站

网址：http://abook.hep.com.cn/1210369
http://abook.hep.edu.cn/1210369

数字课程账号　使用说明详见书内数字课程说明页

ISBN 978-7-04-050694-5

9 787040 506945 >

定价 44.80 元