



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材



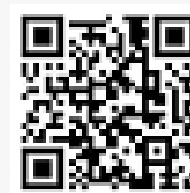
全国优秀教材  
二等奖

# 数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App



全国优秀教材  
二等奖



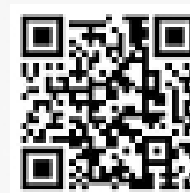
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

# 数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社·北京



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

## 内容提要

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材、普通高等教育“十一五”国家级规划教材和面向 21 世纪课程教材, 主要内容包括实数集与函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数和微分、微分中值定理及其应用、实数的完备性、不定积分、定积分、定积分的应用、反常积分等, 附录为实数理论和积分表, 书后附微积分学简史。

本次修订是在第四版的基础上对一些内容进行适当调整, 使教材逻辑性更合理, 并适当补充数字资源。第五版仍旧保持前四版“内容选取适当, 深入浅出, 易教易学, 可读性强”的特点。

本书可作为高等学校数学和其他相关专业的教材使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 上册 / 华东师范大学数学科学学院编.  
--5 版. --北京: 高等教育出版社, 2019. 5 (2025. 5 重印)  
ISBN 978-7-04-050694-5

I. ①数… II. ①华… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 229064 号

策划编辑 兰莹莹 李蕊 责任编辑 兰莹莹 封面设计 王凌波 版式设计 杜微言  
插图绘制 于博 责任校对 李大鹏 责任印制 耿轩

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a>
印 刷	山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司		<a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>
开 本	787mm×1092mm 1/16		<a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>
印 张	20.25	版 次	1981 年 4 月第 1 版
字 数	440 千字		2019 年 5 月第 5 版
购书热线	010-58581118	印 次	2025 年 5 月第 13 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	44.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 50694-00



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

<b>第一章 实数集与函数</b> .....	1
§ 1 实数 .....	1
一、实数及其性质 .....	1
二、绝对值与不等式 .....	3
§ 2 数集·确界原理 .....	4
一、区间与邻域 .....	4
二、有界集·确界原理 .....	5
§ 3 函数概念 .....	8
一、函数的定义 .....	9
二、函数的表示法 .....	9
三、函数的四则运算 .....	10
四、复合函数 .....	11
五、反函数 .....	11
六、初等函数 .....	13
§ 4 具有某些特性的函数 .....	14
一、有界函数 .....	15
二、单调函数 .....	16
三、奇函数和偶函数 .....	17
四、周期函数 .....	17
<b>第二章 数列极限</b> .....	21
§ 1 数列极限概念 .....	21
§ 2 收敛数列的性质 .....	26
§ 3 数列极限存在的条件 .....	32
<b>第三章 函数极限</b> .....	41
§ 1 函数极限概念 .....	41
一、 $x$ 趋于 $\infty$ 时函数的极限 .....	41
二、 $x$ 趋于 $x_0$ 时函数的极限 .....	42
§ 2 函数极限的性质 .....	46
§ 3 函数极限存在的条件 .....	50
§ 4 两个重要的极限 .....	53
一、证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .....	53
二、证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .....	54



§ 5	无穷小量与无穷大量 .....	S <sub>5</sub>
	一、无穷小量 .....	S <sub>5</sub>
	二、无穷小量阶的比较 .....	S <sub>7</sub>
	三、无穷大量 .....	S <sub>9</sub>
	四、曲线的渐近线 .....	61
<b>第四章</b>	<b>函数的连续性</b> .....	63
§ 1	连续性概念 .....	63
	一、函数在一点的连续性 .....	63
	二、间断点及其分类 .....	66
	三、区间上的连续函数 .....	68
§ 2	连续函数的性质 .....	69
	一、连续函数的局部性质 .....	69
	二、闭区间上连续函数的基本性质 .....	71
	三、反函数的连续性 .....	73
	四、一致连续性 .....	74
§ 3	初等函数的连续性 .....	78
	一、指数函数的连续性 .....	78
	二、初等函数的连续性 .....	80
<b>第五章</b>	<b>导数和微分</b> .....	83
§ 1	导数的概念 .....	83
	一、导数的定义 .....	83
	二、导函数 .....	85
	三、导数的几何意义 .....	87
§ 2	求导法则 .....	90
	一、导数的四则运算 .....	90
	二、反函数的导数 .....	92
	三、复合函数的导数 .....	93
	四、基本求导法则与公式 .....	95
§ 3	参变量函数的导数 .....	97
§ 4	高阶导数 .....	100
§ 5	微分 .....	104
	一、微分的概念 .....	104
	二、微分的运算法则 .....	106
	三、高阶微分 .....	106
	四、微分在近似计算中的应用 .....	107
<b>第六章</b>	<b>微分中值定理及其应用</b> .....	111
§ 1	拉格朗日定理和函数的单调性 .....	111
	一、罗尔定理与拉格朗日定理 .....	111
	二、单调函数 .....	114
§ 2	柯西中值定理和不定式极限 .....	117
	一、柯西中值定理 .....	117
	二、不定式极限 .....	118
§ 3	泰勒公式 .....	125




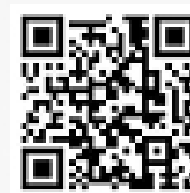
一、带有佩亚诺型余项的泰勒公式 .....	125
二、带有拉格朗日型余项的泰勒公式 .....	128
三、在近似计算上的应用 .....	130
§ 4 函数的极值与最大(小)值 .....	132
一、极值判别 .....	132
二、最大值与最小值 .....	134
§ 5 函数的凸性与拐点 .....	137
§ 6 函数图像的讨论 .....	143
§ 7 方程的近似解 .....	145
<b>第七章 实数的完备性</b> .....	<b>150</b>
§ 1 关于实数集完备性的基本定理 .....	150
一、区间套定理 .....	150
二、聚点定理与有限覆盖定理 .....	151
三、实数完备性基本定理之间的等价性 .....	154
§ 2 上极限和下极限 .....	156
<b>第八章 不定积分</b> .....	<b>161</b>
§ 1 不定积分概念与基本积分公式 .....	161
一、原函数与不定积分 .....	161
二、基本积分表 .....	163
§ 2 换元积分法与分部积分法 .....	166
一、换元积分法 .....	166
二、分部积分法 .....	171
§ 3 有理函数和可化为有理函数的不定积分 .....	175
一、有理函数的不定积分 .....	175
二、三角函数有理式的不定积分 .....	179
三、某些无理根式的不定积分 .....	180
<b>第九章 定积分</b> .....	<b>186</b>
§ 1 定积分概念 .....	186
一、问题提出 .....	186
二、定积分的定义 .....	187
§ 2 牛顿—莱布尼茨公式 .....	190
§ 3 可积条件 .....	192
一、可积的必要条件 .....	193
二、可积的充要条件 .....	193
三、可积函数类 .....	194
§ 4 定积分的性质 .....	198
一、定积分的基本性质 .....	198
二、积分中值定理 .....	202
§ 5 微积分学基本定理·定积分计算(续) .....	205
一、变限积分与原函数的存在性 .....	205
二、换元积分法与分部积分法 .....	209
三、泰勒公式的积分型余项 .....	212
§ 6 可积性理论补叙 .....	215



一、上和与下和的性质 .....	215
二、可积的充要条件 .....	217
<b>第十章 定积分的应用</b> .....	<b>222</b>
§ 1 平面图形的面积 .....	222
§ 2 由平行截面面积求体积 .....	225
§ 3 平面曲线的弧长与曲率 .....	229
一、平面曲线的弧长 .....	229
二、曲率 .....	233
§ 4 旋转曲面的面积 .....	236
一、微元法 .....	236
二、旋转曲面的面积 .....	237
§ 5 定积分在物理中的某些应用 .....	239
一、液体静压力 .....	239
二、引力 .....	240
三、功与平均功率 .....	241
*§ 6 定积分的近似计算 .....	243
一、梯形法 .....	243
二、抛物线法 .....	244
<b>第十一章 反常积分</b> .....	<b>247</b>
§ 1 反常积分概念 .....	247
一、问题提出 .....	247
二、两类反常积分的定义 .....	248
§ 2 无穷积分的性质与敛散判别 .....	252
一、无穷积分的性质 .....	252
二、非负函数无穷积分的敛散判别法 .....	253
三、一般无穷积分的敛散判别法 .....	255
§ 3 瑕积分的性质与敛散判别 .....	258
<b>附录 I 实数理论</b> .....	<b>263</b>
一、建立实数的原则 .....	263
二、分析 .....	264
三、分划全体所成的有序集 .....	266
四、 $\mathbf{R}$ 中的加法 .....	267
五、 $\mathbf{R}$ 中的乘法 .....	268
六、 $\mathbf{R}$ 作为 $\mathbf{Q}$ 的扩充 .....	270
七、实数的无限小数表示 .....	271
八、无限小数四则运算的定义 .....	272
<b>附录 II 积分表</b> .....	<b>275</b>
一、含有 $x^n$ 的形式 .....	275
二、含有 $a+bx$ 的形式 .....	275
三、含有 $a^2 \pm x^2, a > 0$ 的形式 .....	276
四、含有 $a+bx+cx^2, b^2 \neq 4ac$ 的形式 .....	276
五、含有 $\sqrt{a+bx}$ 的形式 .....	277



六、含有 $\sqrt{x^2 \pm a^2}, a > 0$ 的形式 .....	277
七、含有 $\sqrt{a^2 - x^2}, a > 0$ 的形式 .....	277
八、含有 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的形式 .....	278
九、含有 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 的形式 .....	279
十、含有反三角函数的形式 .....	279
十一、含有 $e^x$ 的形式 .....	280
十二、含有 $\ln x$ 的形式 .....	280
<b>部分习题答案与提示</b> .....	<b>282</b>
<b>索引</b> .....	<b>303</b>
 <b>微积分学简史</b> .....	<b>308</b>



从物理学知道,在不计摩擦力的情形下,当桶内水位高度为  $h-x$  时,水从孔中流出的流速(单位时间内流过单位截面积流量)为

$$v = \sqrt{2g(h-x)},$$

其中  $g$  为重力加速度.

设在很小一段时间  $dt$  内,桶中液面降低的微小量为  $dx$ ,它们之间应满足

$$\pi R^2 dx = v\pi r^2 dt,$$

由此则有

$$dt = \frac{R^2}{r^2 \sqrt{2g(h-x)}} dx, x \in [0, h).$$

所以流完一桶水所需时间在形式上亦可写成“积分”:

$$t_f = \int_0^h \frac{R^2}{r^2 \sqrt{2g(h-x)}} dx.$$

但是在这里因为被积函数是  $[0, h)$  上的无界函数,所以它的确切含义应该是

$$\begin{aligned} t_f &= \lim_{u \rightarrow h^-} \int_0^u \frac{R^2}{r^2 \sqrt{2g(h-x)}} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow h^-} \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{R^2}{r^2} (\sqrt{h} - \sqrt{h-u}) \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{R}{r}\right)^2. \end{aligned}$$

□

相对于以前所讲的定积分(不妨称之为正常积分)而言,例 1 和例 2 分别提出了两类反常积分.

## 二、两类反常积分的定义

**定义 1** 设函数  $f$  定义在无穷区间  $[a, +\infty)$  上,且在任何有限区间  $[a, u]$  上可积.如果存在极限

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx = J, \tag{1}$$

则称此极限  $J$  为函数  $f$  在  $[a, +\infty)$  上的无有限反常积分(简称无穷积分),记作

$$J = \int_a^{+\infty} f(x) dx, \tag{1'}$$

并称  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛.如果极限(1)不存在,为方便起见,亦称  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

类似地,可定义  $f$  在  $(-\infty, b]$  上的无穷积分:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^b f(x) dx. \tag{2}$$

对于  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的无穷积分,用前面两种无穷积分来定义:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx, \tag{3}$$

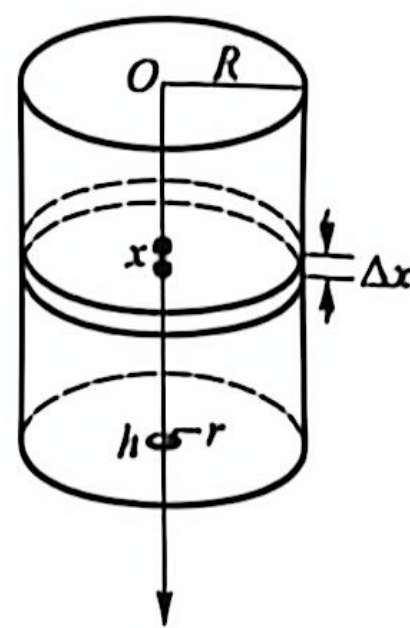


图 11-2

其中  $a$  为任一实数, 当且仅当等号右边两个无穷积分都收敛时, 它才是收敛的.

注 1 无穷积分(3)的收敛性与收敛时的值, 都和实数  $a$  的选取无关.

注 2 由于无穷积分(3)是由(1)、(2)两类无穷积分来定义的, 因此,  $f$  在任何有限区间  $[v, u] \subset (-\infty, +\infty)$  上, 首先必须是可积的.

注 3  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛的几何意义是: 若  $f$  在  $[a, +\infty)$

上为非负连续函数, 则图 11-3 中介于曲线  $y=f(x)$ , 直线  $x=a$  以及  $x$  轴之间那一块向右无限延伸的阴影区域有面积  $J$ .

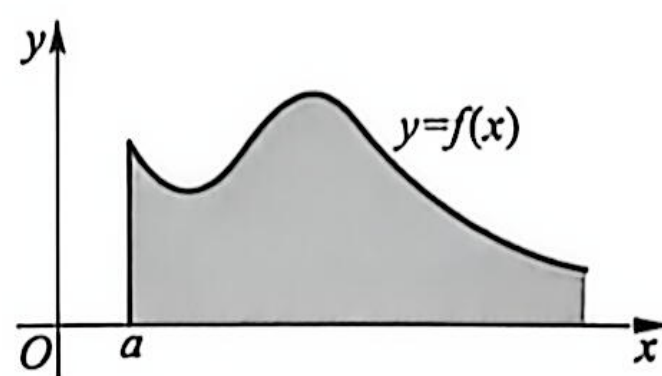


图 11-3

例 3 讨论无穷积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (4)$$

的敛散性.

解 由于

$$\int_1^u \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(u^{1-p} - 1), & p \neq 1, \\ \ln u, & p = 1, \end{cases}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

因此无穷积分(4)当  $p > 1$  时收敛, 其值为  $\frac{1}{p-1}$ ; 而当  $p \leq$

1 时发散于  $+\infty$ .  $\square$

从图 11-4 看到, 例 3 的结论是很直观的:  $p$  的值越大, 曲线  $y = \frac{1}{x^p}$  当  $x > 1$  时越靠近  $x$  轴, 从而曲线下方的阴影区域存在有限面积的可能性也就越大.

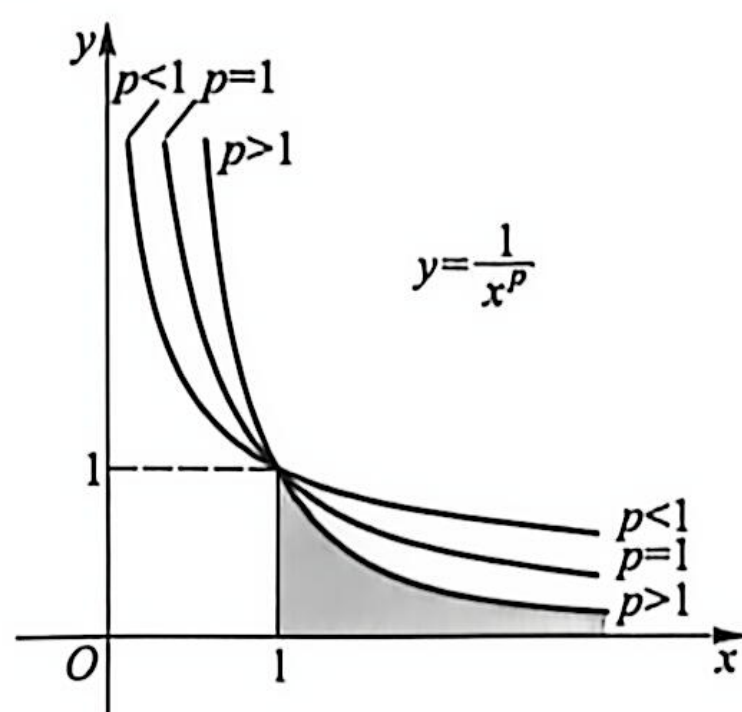


图 11-4

例 4 讨论下列无穷积分的敛散性:

$$1) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}; \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

解 1) 由于无穷积分是通过变限定积分的极限来定义的, 因此有关定积分的换元积分法和分部积分法一般都可引用到无穷积分中来. 对于本例来说, 就有

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}.$$

从例 3 知道, 该无穷积分当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散.

2) 任取实数  $a$ , 讨论如下两个无穷积分:

$$\int_{-\infty}^a \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{和} \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

由于



$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u \rightarrow -\infty} (\arctan a - \arctan u) = \arctan a + \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \int_0^v \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{v \rightarrow +\infty} (\arctan v - \arctan 0) = \frac{\pi}{2} - \arctan 0,$$

因此这两个无穷积分都收敛. 由定义 1,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi. \quad \square$$

注 由于上述结果与  $a$  无关, 因此若取  $a=0$ , 则可使计算过程更简洁些.

**定义 2** 设函数  $f$  定义在区间  $(a, b]$  上, 在点  $a$  的任一右邻域上无界, 但在任何内闭区间  $[u, b] \subset (a, b]$  上有界且可积. 如果存在极限

$$\lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x) dx = J, \quad (5)$$

则称此极限为无界函数  $f$  在  $(a, b]$  上的反常积分, 记作

$$J = \int_a^b f(x) dx, \quad (5')$$

并称反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛. 如果极限 (5) 不存在, 这时也说反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

在定义 2 中, 被积函数  $f$  在点  $a$  近旁是无界的, 这时点  $a$  称为  $f$  的瑕点, 而无界函数反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  又称为瑕积分.

类似地, 可定义瑕点为  $b$  时的瑕积分:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x) dx.$$

其中  $f$  在  $[a, b)$  有定义, 在点  $b$  的任一左邻域上无界, 但在任何  $[a, u] \subset [a, b)$  上可积.

若  $f$  的瑕点  $c \in (a, b)$ , 则定义瑕积分

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{u \rightarrow c^-} \int_a^u f(x) dx + \lim_{v \rightarrow c^+} \int_v^b f(x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $f$  在  $[a, c) \cup (c, b]$  上有定义, 在点  $c$  的任一邻域上无界, 但在任何  $[a, u] \subset [a, c)$  和  $[v, b] \subset (c, b]$  上都可积. 当且仅当 (6) 式右边两个瑕积分都收敛时, 左边的瑕积分才是收敛的.

又若  $a, b$  两点都是  $f$  的瑕点, 而  $f$  在任何  $[u, v] \subset (a, b)$  上可积, 这时定义瑕积分

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^c f(x) dx + \lim_{v \rightarrow b^-} \int_c^v f(x) dx, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $c$  为  $(a, b)$  上任一实数. 同样地, 当且仅当 (7) 式右边两个瑕积分都收敛时, 左边的瑕积分才是收敛的.

**例 5** 计算瑕积分  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  的值.



解 被积函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  在  $[0, 1)$  上连续, 从而在任何  $[0, u] \subset [0, 1)$  上可积,

$x=1$  为其瑕点. 依定义 2 求得

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \arcsin u = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

例 6 讨论瑕积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^q} (q > 0) \quad (8)$$

的收敛性.

解 被积函数在  $(0, 1]$  上连续,  $x=0$  为其瑕点. 由于

$$\int_u^1 \frac{dx}{x^q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}(1-u^{1-q}), & q \neq 1, (0 < u < 1), \\ -\ln u, & q = 1 \end{cases}$$

故当  $0 < q < 1$  时, 瑕积分(8)收敛, 且

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^q} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^1 \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{1-q};$$

而当  $q \geq 1$  时, 瑕积分(8)发散于  $+\infty$ . □

上述结论在图 11-4 中同样能获得直观的反映.

如果把例 3 与例 6 联系起来, 考察反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p} (p > 0). \quad (9)$$

我们定义

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p},$$

它当且仅当右边的瑕积分和无穷积分都收敛时才收敛. 但由例 3 与例 6 的结果可知, 这两个反常积分不能同时收敛, 故反常积分(9)对任何实数  $p$  都是发散的.

### 习 题 11.1

1. 讨论下列无穷积分是否收敛? 若收敛, 则求其值:

$$\begin{aligned} (1) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx; & \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx; \\ (3) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx; & \quad (4) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}; \\ (5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}; & \quad (6) \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx; \\ (7) \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \sin x dx; & \quad (8) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

2. 讨论下列瑕积分是否收敛? 若收敛, 则求其值:

$$(1) \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}; \quad (2) \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2};$$



第四版被评为 2011 年度普通高等教育精品教材  
第一版荣获全国第一届高等学校优秀教材优秀奖



### 数字课程网站

网址: <http://abook.hep.com.cn/1210369>  
<http://abook.hep.edu.cn/1210369>

数字课程账号 使用说明详见书内数字课程说明页

ISBN 978-7-04-050694-5



9 787040 506945 >

定价 44.80 元



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App