"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

概率论与数理统计教程

第三版

茆诗松 程依明 濮晓龙 编著

高等教育出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

概率论与数理统计教程

第三版

茆诗松 程依明 濮晓龙 编著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。全书共八章，前四章为概率论部分，主要叙述各种概率分布及其性质，后四章为数理统计部分，主要叙述各种参数估计与假设检验。本次修订适当补充了数字资源(以符号标识)。

本书的编写从实例出发，图文并茂，通俗易懂，注重讲清楚基本概念与统计思想，强调各种方法的应用，适合初次接触概率统计的读者阅读。全书插图100多幅，例题250多道，习题600余道。

本书可供高等学校数学类专业与统计学专业作为教材使用，亦可供其他专业类似课程参考，也适合自学使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程/茆诗松，程依明，濮晓龙编著. --3版.--北京：高等教育出版社，2019.11(2020.4重印)
ISBN 978-7-04-051148-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①茆… ②程… ③濮… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第009658号

策划编辑 李 蕊　责任编辑 李 蕊　特约编辑 高 旭　封面设计 王凌波
版式设计 马 云　插图绘制 于 博　责任校对 王 雨　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 肥城新华印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 30.5
字 数 670千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版 次 2004年10月第1版
2019年11月第3版
印 次 2020年4月第2次印刷
定 价 59.00元

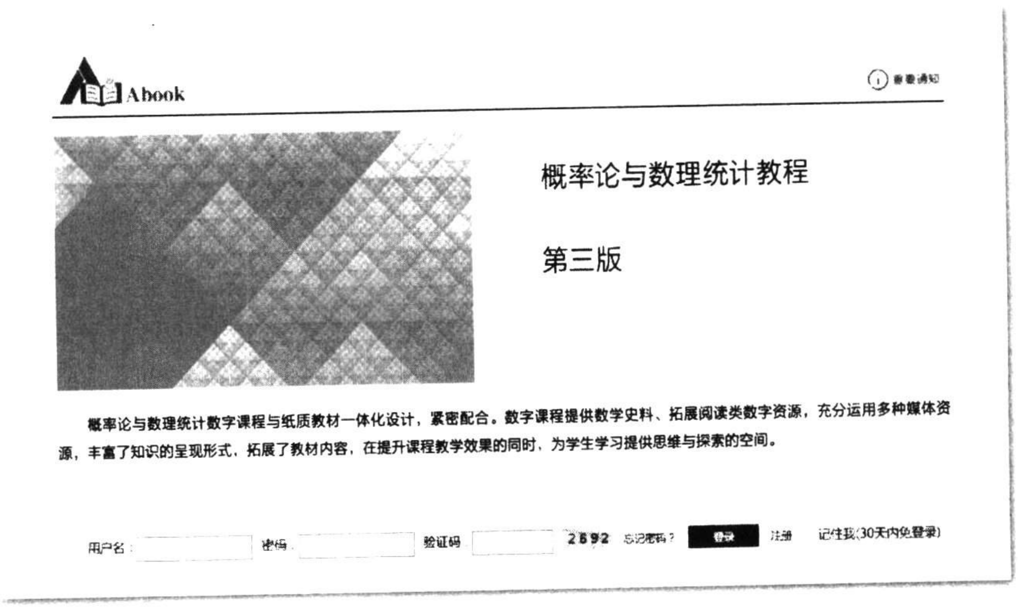
物 料 号 51148-00

概率论与数理统计教程

第三版

茆诗松 程依明 濮晓龙 编著

1. 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1225539，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录，进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

扫描二维码
下载Abook应用

概率论简史

数理统计简史

http://abook.hep.com.cn/1225539

目录

3. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的样本，考虑检验问题

$$H_0: \mu = 6 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq 6,$$

拒绝域取为 $W = \{|\bar{x}-6| \geqslant c\}$，试求 c 使得检验的显著性水平为 0.05，并求该检验在 $\mu = 6.5$ 处犯第二类错误的概率.

4. 设总体为均匀分布 $U(0, \theta)$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是样本，考虑检验问题

$$H_0: \theta \geqslant 3 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta < 3,$$

拒绝域取为 $W = \{x_{(n)} \leqslant 2.5\}$，求检验犯第一类错误的最大值 α，若要使得该最大值 α 不超过 0.05，n 至少应取多大?

5. 在假设检验问题中，若检验结果是接受原假设，则检验可能犯哪一类错误? 若检验结果是拒绝原假设，则又有可能犯哪一类错误?

6. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{20}$ 是来自 0-1 总体 $b(1, p)$ 的样本，考虑如下检验问题：

$$H_0: p = 0.2 \quad \text{vs} \quad H_1: p \neq 0.2,$$

取拒绝域为 $W = \left\{ \sum_{i=1}^{20} x_i \geqslant 7 \text{ 或 } \sum_{i=1}^{20} x_i \leqslant 1 \right\}$，

（1）求 $p = 0, 0.1, 0.2, \cdots, 0.9, 1$ 时的势并由此画出势函数的图；

（2）求在 $p = 0.05$ 时犯第二类错误的概率.

7. 设一个单一观测的样本 x 取自密度函数为 $p(x)$ 的总体，对 $p(x)$ 考虑统计假设

$$H_0: p_0(x) = I_{\{0,1\}}(x) \quad \text{vs} \quad H_1: p_1(x) = 2x I_{\{0,1\}}(x).$$

若其拒绝域的形式为 $W = \{x: x \geqslant c\}$，试确定一个 c，使得犯第一类、第二类错误的概率满足 $\alpha + 2\beta$ 为最小，并求其最小值.

8. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{30}$ 为取自泊松分布 $P(\lambda)$ 的随机样本.

（1）试给出单侧假设检验问题 $H_0: \lambda \leqslant 0.1 \quad \text{vs} \quad H_1: \lambda > 0.1$ 的显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的检验；

（2）求此检验的势函数 $\beta(\lambda)$ 在 $\lambda = 0.05, 0, 2, 0.3, \cdots, 0, 9$ 时的值，并据此画出 $\beta(\lambda)$ 的图像.

§ 7.2 正态总体参数假设检验

本节对正态总体参数 μ 和 σ^2 的各种检验分别进行讨论.

7.2.1 单个正态总体均值的检验

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，考虑如下三种关于 μ 的检验问题：

$$\text{I} \quad H_0: \mu \leqslant \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu > \mu_0, \tag{7.2.1}$$

$$\text{II} \quad H_0: \mu \geqslant \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu < \mu_0, \tag{7.2.2}$$

$$\text{III} \quad H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq \mu_0, \tag{7.2.3}$$

其中 μ_0 是已知常数. 由于正态总体含两个参数，总体方差 σ^2 已知与否对检验有影响. 下面我们分 σ 已知和未知两种情况叙述.

一、$\sigma = \sigma_0$ 已知时的 u 检验

对于(7.2.1)式所示的单侧检验问题 I，由于 μ 的点估计是 $\bar{x}$，且 $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma_0^2/n)$，故选用检验统计量

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \tag{7.2.4}$$

是恰当的.直觉告诉我们:当样本均值 $\bar{x}$ 不超过设定均值 μ_0 时,应倾向于接受原假设;当样本均值 $\bar{x}$ 超过 μ_0 时,应倾向于拒绝原假设.可是,在有随机性存在的场合,如果 $\bar{x}$ 比 μ_0 大一点就拒绝原假设似乎不当,只有当 $\bar{x}$ 比 μ_0 大到一定程度时拒绝原假设才是恰当的.这就存在一个临界值 c,拒绝域为

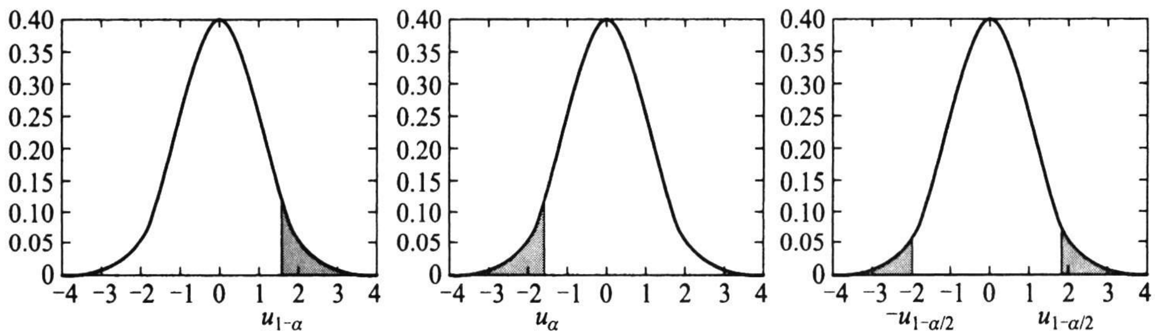
$$W_{\mathrm{I}}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):u\geqslant c\}, \tag{7.2.5}$$

常简记为 $\{u\geqslant c\}$.若要求检验的显著性水平为 α,则 c 满足

$$P_{\mu_0}(u\geqslant c)=\alpha.$$

由于在 $\mu=\mu_0$ 时,$u\sim N(0,1)$,故 $c=u_{1-\alpha}$ (见图 7.2.1(a)),最后的拒绝域为

$$W_{\mathrm{I}}=\{u\geqslant u_{1-\alpha}\}. \tag{7.2.6}$$



(a) H_1: $\mu>\mu_0$　(b) H_1: $\mu<\mu_0$　(c) H_1: $\mu\neq\mu_0$

图 7.2.1 u 检验的拒绝域

该检验用的检验统计量是 u 统计量,故一般称为 u 检验.该检验的势函数是 μ 的函数,它可用正态分布写出,具体如下:对 $\mu\in(-\infty,\infty)$,

$$\begin{aligned}
g(\mu)&=P_\mu(\boldsymbol{X}\in W_{\mathrm{I}})=P_\mu(u\geqslant u_{1-\alpha})\\
&=P_\mu\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\geqslant u_{1-\alpha}\right)\\
&=P_\mu\left(\frac{\bar{x}-\mu+\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\geqslant u_{1-\alpha}\right)\\
&=P_\mu\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\geqslant\frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}+u_{1-\alpha}\right)\\
&=1-\Phi(\sqrt{n}(\mu_0-\mu)/\sigma_0+u_{1-\alpha}).
\end{aligned}$$

由此可见,势函数是 μ 的增函数,其图形见图 7.2.2(a).由增函数性质知,只要 $g(\mu_0)=\alpha$,就可保证在 $\mu\leqslant\mu_0$ 时有 $g(\mu)\leqslant\alpha$.所以上述求出的检验是显著性水平为 α 的检验.

下面我们讲述用 p 值进行检验的方法.

类似于 7.1.3 节的讲述,对给定的样本观测值,可以计算出相应的检验统计量 u 的值,记为 $u_0=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma_0}$,这里的 $\bar{x}$ 是样本观测值.因在 $\mu=\mu_0$ 时,u 是服从标准正态分布

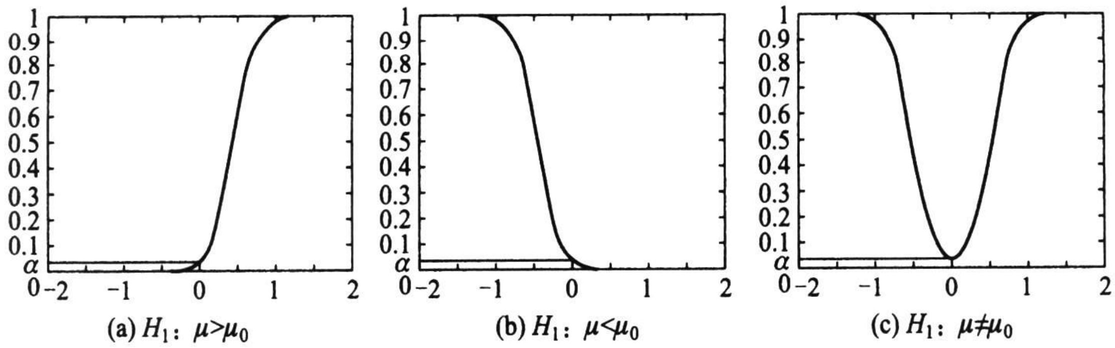


图 7.2.2 $g(\mu)$的图形

的随机变量,令

$$p_{\mathrm{I}}=P(u\geqslant u_0)=1-\Phi(u_0), \tag{7.2.7}$$

此即说明 $u_0=u_{1-p_{\mathrm{I}}}$,于是由正态分布函数的反函数的单调性有如下结论:

- 当 $p_{\mathrm{I}}\leqslant\alpha$ 时,$u_{1-\alpha}\leqslant u_0$,于是观测值落在拒绝域里,应拒绝原假设.
- 当 $p_{\mathrm{I}}>\alpha$ 时,$u_{1-\alpha}>u_0$,于是观测值不在拒绝域里,应接受原假设.

由此可以看出,(7.2.7)计算出的值就是该检验的 p 值.

对检验问题(7.2.2)所示的单侧检验问题Ⅱ的讨论是完全类似的.仍选用 u 作为检验统计量,考虑到(7.2.2)的备择假设 H_1 在左侧,其拒绝域(见图 7.2.1(b))为

$$W_{\mathrm{II}}=\{u\leqslant u_\alpha\}. \tag{7.2.8}$$

而检验的 p 值为

$$p_{\mathrm{II}}=P(u\leqslant u_0)=\Phi(u_0), \tag{7.2.9}$$

u_0,u 的含义同上,后面还会用到就不再一一指出了.

对检验问题(7.2.3)所示的双侧检验问题Ⅲ,也可类似进行讨论,只不过检验的 p 值稍有不同.仍选用 u 作为检验统计量,考虑到(7.2.3)的备择假设 H_1 分散在两侧,故其拒绝域亦应在两侧,即拒绝域应有如下形式

$$W_{\mathrm{III}}=\{|u|\geqslant c\}.$$

对给定的显著性水平 α $(0<\alpha<1)$,由 $P_{\mu_0}(|u|\geqslant c)=\alpha$ 可定出 $c=u_{1-\alpha/2}$ (见图 7.2.1(c)),最后的拒绝域为

$$W_{\mathrm{III}}=\{|u|\geqslant u_{1-\alpha/2}\}. \tag{7.2.10}$$

下面介绍双侧检验的 p 值的计算.在检验统计量分布对称场合,双侧检验的 p 值的计算与单侧检验是类似的,不对称场合我们在后面介绍.

仿上,令

$$p_{\mathrm{III}}=P(|u|\geqslant|u_0|)=2(1-\Phi(|u_0|)), \tag{7.2.11}$$

此即说明 $|u_0|=u_{1-p_{\mathrm{III}}/2}$,这里要用到 u_0 的绝对值是因为对双侧假设检验,观测值可能为正,也可能为负,二者机会相同,于是有类似的结论:

- 当 $p_{\mathrm{III}}\leqslant\alpha$ 时,$u_{1-\alpha/2}\leqslant|u_0|$,于是观测值落在拒绝域里,应拒绝原假设.
- 当 $p_{\mathrm{III}}>\alpha$ 时,$u_{1-\alpha/2}>|u_0|$,于是观测值不在拒绝域里,应接受原假设.

由此可以看出,(7.2.11)计算出的值就是该检验的 p 值.

例 7.2.1 从甲地发送一个信号到乙地.设乙地接收到的信号值是一个服从正态分布 $N(\mu,0.2^2)$ 的随机变量,其中 μ 为甲地发送的真实信号值.现甲地重复发送同一信号

5 次,乙地接收到的信号值为

$$8.05 \quad 8.15 \quad 8.2 \quad 8.1 \quad 8.25,$$

设接收方有理由猜测甲地发送的信号值为 8,问能否接受这猜测?

解 这是一个假设检验的问题,总体 $X \sim N(\mu, 0.2^2)$,待检验的原假设 H_0 与备择假设 H_1 分别为

$$H_0: \mu = 8 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq 8.$$

这是一个双侧检验问题,检验的拒绝域为 $\{|u| \geqslant u_{1-\alpha/2}\}$.取显著性水平 $\alpha = 0.05$,则查表知 $u_{0.975} = 1.96$.由该例中观测值可计算得出

$$\bar{x} = 8.15, \ u_0 = \sqrt{5}(8.15-8)/0.2 = 1.68,$$

u_0 值未落入拒绝域 $\{|u| \geqslant 1.96\}$ 内,故不能拒绝原假设,即接受原假设,可认为猜测成立.

我们也可以采用 p 值完成此次检验.此处 $u_0 = 1.68$,根据(7.2.11)式,

$$p = 2(1-\Phi(1.68)) = 0.093.$$

由于 p 值大于事先给定的水平 0.05,故不能拒绝原假设,结论是相同的.

进一步,我们从 p 值还可以看到,只要事先给定的显著性水平不高于0.093,则都不能拒绝原假设;而若事先给定的显著性水平高于 0.093,如事先给定的显著性水平为 0.10,则检验就会作出拒绝原假设的结论.

说明:在实际中也经常会遇到如下两个检验问题:

$$\text{Ⅳ} \quad H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu > \mu_0,$$

$$\text{Ⅴ} \quad H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu < \mu_0.$$

它仍可用检验统计量 u 施行检验.检验问题Ⅳ的拒绝域与检验问题Ⅰ的拒绝域相同,即 $W_{\text{Ⅳ}} = \{u \geqslant u_{1-\alpha}\}$.这是因为检验问题Ⅳ与Ⅰ的备择假设相同,而Ⅳ的原假设是Ⅰ的原假设的子集,由于此时 u 检验的势函数是 μ 的单调增函数,因此,检验问题Ⅳ的显著性水平为 α 的检验与检验问题Ⅰ的显著性水平为 α 的检验是相同的,从而拒绝域也相同,它们的检验的 p 值也相同.类似地,检验问题Ⅴ与检验问题Ⅱ的拒绝域以及 p 值也是相同的.这个现象在以后其他检验中也会出现,结论是相似的.由此,本文中不再考虑诸如Ⅳ,Ⅴ的检验问题(若出现此类检验问题,可归结为检验问题Ⅰ,Ⅱ处理).

二、σ 未知时的 t 检验

对检验问题Ⅰ,由于 σ 未知,无法使用(7.2.4)式作检验.一个自然的想法是将(7.2.4)式中未知的 σ 替换成样本标准差 s,这就形成 t 检验统计量

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s}. \tag{7.2.12}$$

由推论 5.4.2 知,在 $\mu = \mu_0$ 时,$t \sim t(n-1)$,从而检验问题Ⅰ的拒绝域为

$$W_{\text{Ⅰ}} = \{t \geqslant t_{1-\alpha}(n-1)\}, \tag{7.2.13}$$

检验的 p 值是类似的,对给定的样本观测值,可以计算出相应的检验统计量 t 的值,记为 $t_0 = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s}$,这里的 $\bar{x}$,s 可由样本观测值算得.因 t 是服从自由度是 $n-1$ 的 t 分布的随机变量,则

$$p_{\mathrm{I}}=P(t \geqslant t_0). \tag{7.2.14}$$

对另两组检验问题的讨论是完全类似于上一小节的,罗列结果如下:检验问题Ⅱ的拒绝域为

$$W_{\mathrm{II}}=\{t \leqslant t_{\alpha}(n-1)\}, \tag{7.2.15}$$

p 值为

$$p_{\mathrm{II}}=P(t \leqslant t_0). \tag{7.2.16}$$

检验问题Ⅲ的拒绝域为

$$W_{\mathrm{III}}=\{|t| \geqslant t_{1-\alpha/2}(n-1)\}, \tag{7.2.17}$$

p 值为

$$p_{\mathrm{III}}=P(|t| \geqslant |t_0|), \tag{7.2.18}$$

同样可证明这三个检验都是显著性水平为 α 的检验.

例 7.2.2 某厂生产的某种铝材的长度服从正态分布,其均值设定为240 cm.现从该厂抽取 5 件产品,测得其长度(单位:cm)为

239.7　239.6　239　240　239.2,

试判断该厂此类铝材的长度是否满足设定要求?

这是一个关于正态均值的双侧假设检验问题.原假设是 $H_0:\mu=240$,备择假设是 $H_1:\mu\neq 240$.由于 σ 未知,故采用 t 检验,其拒绝域为$\{|t| \geqslant t_{1-\alpha/2}(n-1)\}$,若取 $\alpha=0.05$,则查表得 $t_{0.975}(4)=2.776\ 4$.现由样本计算得到 $\bar{x}=239.5$,$s=0.4$,故

$$t_0=\sqrt{5}(239.5-240)/0.4=-2.795,$$

由于$|t_0|=2.795>2.776\ 4$,故拒绝原假设,认为该厂生产的铝材的长度不满足设定要求.

下面用 p 值再作一次检验.此处 $t_0=-2.795$,记 t 是服从自由度是 4 的 t 分布的随机变量,则根据(7.2.18),

$$p=P(|t| \geqslant 2.795)=2P(t \geqslant 2.795),$$

利用统计软件(如 R 或 Excel)可计算出具体 p 值为 0.0491,由于 p 值小于事先给定的显著性水平 0.05,故拒绝原假设,结论是相同的.

综上,关于单个正态总体的均值的检验问题可汇总成表 7.2.1.

表 7.2.1　单个正态总体均值的假设检验

检验法	H_0	H_1	检验统计量	拒绝域	p 值
u 检验	$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$u=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$	$\{u\geqslant u_{1-\alpha}\}$	$1-\Phi(u_0)$
($\sigma=\sigma_0$ 已知)	$\mu\geqslant\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$\{u\leqslant u_{\alpha}\}$	$\Phi(u_0)$
	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$		$\{\lvert u\rvert\geqslant u_{1-\alpha/2}\}$	$2(1-\Phi(\lvert u_0\rvert))$
t 检验	$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$\{t\geqslant t_{1-\alpha}(n-1)\}$	$P(t\geqslant t_0)$
(σ 未知)	$\mu\geqslant\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$\{t\leqslant t_{\alpha}(n-1)\}$	$P(t\leqslant t_0)$
	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$		$\{\lvert t\rvert\geqslant t_{1-\alpha/2}(n-1)\}$	$P(\lvert t\rvert\geqslant \lvert t_0\rvert)$

注:$u_0=\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)/\sigma_0$,$t_0=\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)/s$,$u$ 是服从 $N(0,1)$ 的随机变量,t 是服从 $t(n-1)$ 的随机变量.