




“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

概率论与 数理统计教程

第三版

茆诗松 程依明 濮晓龙 编著

高等教育出版社

 鲸鱼书单



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材


概率论与 数理统计教程

第三版

茆诗松 程依明 濮晓龙 编著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。全书共八章，前四章为概率论部分，主要叙述各种概率分布及其性质，后四章为数理统计部分，主要叙述各种参数估计与假设检验。本次修订适当补充了数字资源(以符号标识)。

本书的编写从实例出发，图文并茂，通俗易懂，注重讲清楚基本概念与统计思想，强调各种方法的应用，适合初次接触概率统计的读者阅读。全书插图 100 多幅，例题 250 多道，习题 600 余道。

本书可供高等学校数学类专业与统计学专业作为教材使用，亦可供其他专业类似课程参考，也适合自学使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程 / 茆诗松, 程依明, 濮晓龙
编著. --3 版. --北京: 高等教育出版社, 2019.11 (2020.4 重印)
ISBN 978-7-04-051148-2

I. ①概… II. ①茆… ②程… ③濮… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 009658 号

策划编辑	李蕊	责任编辑	李蕊	特约编辑	高旭	封面设计	王凌波
版式设计	马云	插图绘制	于博	责任校对	王雨	责任印制	刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 肥城新华印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 30.5
字 数 670 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2004 年 10 月第 1 版
2019 年 11 月第 3 版
印 次 2020 年 4 月第 2 次印刷
定 价 59.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 51148-00

概率论与数理统计教程

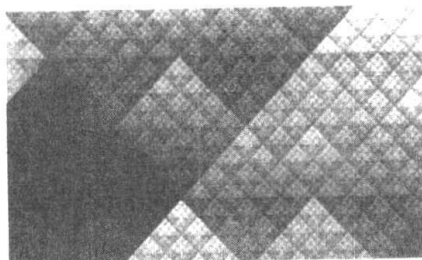
第三版

茆诗松 程依明 濮晓龙 编著

1. 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1225539>, 或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录, 进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号(20位密码, 刮开涂层可见), 或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



帮助中心



概率论与数理统计教程

第三版

概率论与数理统计数字课程与纸质教材一体化设计, 紧密配合。数字课程提供数学史料、拓展阅读类数字资源, 充分运用多种媒体资源, 丰富了知识的呈现形式, 拓展了教材内容, 在提升课程教学效果的同时, 为学生学习提供思维与探索的空间。

用户名: 密码: 验证码: 2592 忘记密码? 注册 记住我(30天内免登录)

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至abook@hep.com.cn。



扫描二维码
下载Abook应用



概率论简史



数理统计简史

<http://abook.hep.com.cn/1225539>

第一章 随机事件与概率	1
§ 1.1 随机事件及其运算	1
1.1.1 随机现象	1
1.1.2 样本空间	1
1.1.3 随机事件	2
1.1.4 随机变量	3
1.1.5 事件间的关系	4
1.1.6 事件间的运算	5
1.1.7 事件域	7
习题 1.1	10
§ 1.2 概率的定义及其确定方法	11
1.2.1 概率的公理化定义	11
1.2.2 排列与组合公式	12
1.2.3 确定概率的频率方法	13
1.2.4 确定概率的古典方法	15
1.2.5 确定概率的几何方法	22
1.2.6 确定概率的主观方法	26
习题 1.2	27
§ 1.3 概率的性质	28
1.3.1 概率的可加性	29
1.3.2 概率的单调性	30
1.3.3 概率的加法公式	31
1.3.4 概率的连续性	33
习题 1.3	35
§ 1.4 条件概率	36
1.4.1 条件概率的定义	36
1.4.2 乘法公式	38
1.4.3 全概率公式	40
1.4.4 贝叶斯公式	43
习题 1.4	45
§ 1.5 独立性	47
1.5.1 两个事件的独立性	47
1.5.2 多个事件的相互独立性	48
1.5.3 试验的独立性	52

习题 1.5	52
第二章 随机变量及其分布	55
§ 2.1 随机变量及其分布	55
2.1.1 随机变量的概念	55
2.1.2 随机变量的分布函数	56
2.1.3 离散随机变量的概率分布列	59
2.1.4 连续随机变量的概率密度函数	62
习题 2.1	67
§ 2.2 随机变量的数学期望	69
2.2.1 数学期望的概念	69
2.2.2 数学期望的定义	70
2.2.3 数学期望的性质	73
习题 2.2	75
§ 2.3 随机变量的方差与标准差	77
2.3.1 方差与标准差的定义	77
2.3.2 方差的性质	79
2.3.3 切比雪夫不等式	80
习题 2.3	81
§ 2.4 常用离散分布	82
2.4.1 二项分布	82
2.4.2 泊松分布	85
2.4.3 超几何分布	90
2.4.4 几何分布与负二项分布	91
习题 2.4	93
§ 2.5 常用连续分布	94
2.5.1 正态分布	94
2.5.2 均匀分布	99
2.5.3 指数分布	101
2.5.4 伽马分布	102
2.5.5 贝塔分布	104
习题 2.5	107
§ 2.6 随机变量函数的分布	109
2.6.1 离散随机变量函数的分布	109
2.6.2 连续随机变量函数的分布	110
习题 2.6	114
§ 2.7 分布的其他特征数	116
2.7.1 k 阶矩	116
2.7.2 变异系数	117
2.7.3 分位数	117
2.7.4 中位数	119
2.7.5 偏度系数	120
2.7.6 峰度系数	121
习题 2.7	123

第三章 多维随机变量及其分布	125
§ 3.1 多维随机变量及其联合分布	125
3.1.1 多维随机变量	125
3.1.2 联合分布函数	125
3.1.3 联合分布列	127
3.1.4 联合密度函数	128
3.1.5 常用多维分布	130
习题 3.1	134
§ 3.2 边际分布与随机变量的独立性	136
3.2.1 边际分布函数	136
3.2.2 边际分布列	137
3.2.3 边际密度函数	138
3.2.4 随机变量间的独立性	140
习题 3.2	143
§ 3.3 多维随机变量函数的分布	145
3.3.1 多维离散随机变量函数的分布	145
3.3.2 最大值与最小值的分布	147
3.3.3 连续场合的卷积公式	149
3.3.4 变量变换法	151
习题 3.3	154
§ 3.4 多维随机变量的特征数	155
3.4.1 多维随机变量函数的数学期望	156
3.4.2 数学期望与方差的运算性质	157
3.4.3 协方差	159
3.4.4 相关系数	162
3.4.5 随机向量的数学期望向量与协方差矩阵	168
习题 3.4	169
§ 3.5 条件分布与条件期望	173
3.5.1 条件分布	173
3.5.2 条件数学期望	179
习题 3.5	183
第四章 大数定律与中心极限定理	186
§ 4.1 随机变量序列的两种收敛性	186
4.1.1 依概率收敛	186
4.1.2 按分布收敛、弱收敛	188
习题 4.1	190
§ 4.2 特征函数	192
4.2.1 特征函数的定义	192
4.2.2 特征函数的性质	194
4.2.3 特征函数唯一决定分布函数	198
习题 4.2	201
§ 4.3 大数定律	202
4.3.1 伯努利大数定律	202

4.3.2	常用的几个大数定律	205
习题 4.3	209
§ 4.4	中心极限定理	210
4.4.1	独立随机变量和	210
4.4.2	独立同分布下的中心极限定理	212
4.4.3	二项分布的正态近似	214
4.4.4	独立不同分布下的中心极限定理	217
习题 4.4	220
第五章	统计量及其分布	223
§ 5.1	总体与样本	223
5.1.1	总体与个体	223
5.1.2	样本	225
习题 5.1	226
§ 5.2	样本数据的整理与显示	227
5.2.1	经验分布函数	227
5.2.2	频数频率表	228
5.2.3	样本数据的图形显示	229
习题 5.2	231
§ 5.3	统计量及其分布	232
5.3.1	统计量与抽样分布	232
5.3.2	样本均值及其抽样分布	233
5.3.3	样本方差与样本标准差	236
5.3.4	样本矩及其函数	237
5.3.5	次序统计量及其分布	239
5.3.6	样本分位数与样本中位数	243
5.3.7	五数概括与箱线图	244
习题 5.3	246
§ 5.4	三大抽样分布	249
5.4.1	χ^2 分布(卡方分布)	250
5.4.2	F 分布	252
5.4.3	t 分布	254
习题 5.4	258
§ 5.5	充分统计量	259
5.5.1	充分性的概念	259
5.5.2	因子分解定理	262
习题 5.5	264
第六章	参数估计	267
§ 6.1	点估计的概念与无偏性	267
6.1.1	点估计及无偏性	267
6.1.2	有效性	270
习题 6.1	271
§ 6.2	矩估计及相合性	272
6.2.1	替换原理和矩法估计	272

6.2.2	概率函数已知时未知参数的矩估计	273
6.2.3	相合性	274
	习题 6.2	276
§ 6.3	最大似然估计与 EM 算法	277
6.3.1	最大似然估计	277
6.3.2	EM 算法	280
6.3.3	渐近正态性	282
	习题 6.3	285
§ 6.4	最小方差无偏估计	286
6.4.1	均方误差	286
6.4.2	一致最小方差无偏估计	287
6.4.3	充分性原则	289
6.4.4	克拉默-拉奥不等式	290
	习题 6.4	293
§ 6.5	贝叶斯估计	294
6.5.1	统计推断的基础	294
6.5.2	贝叶斯公式的密度函数形式	295
6.5.3	贝叶斯估计	296
6.5.4	共轭先验分布	298
	习题 6.5	299
§ 6.6	区间估计	300
6.6.1	区间估计的概念	300
6.6.2	枢轴量法	302
6.6.3	单个正态总体参数的置信区间	303
6.6.4	大样本置信区间	306
6.6.5	样本量的确定	307
6.6.6	两个正态总体下的置信区间	308
	习题 6.6	312
第七章	假设检验	314
§ 7.1	假设检验的基本思想与概念	314
7.1.1	假设检验问题	314
7.1.2	假设检验的基本步骤	315
7.1.3	检验的 p 值	319
	习题 7.1	320
§ 7.2	正态总体参数假设检验	321
7.2.1	单个正态总体均值的检验	321
7.2.2	假设检验与置信区间的关系	326
7.2.3	两个正态总体均值差的检验	326
7.2.4	成对数据检验	329
7.2.5	正态总体方差的检验	331
	习题 7.2	333
§ 7.3	其他分布参数的假设检验	337
7.3.1	指数分布参数的假设检验	337

7.3.2	比率 p 的检验	337
7.3.3	大样本检验	338
	习题 7.3	340
§ 7.4	似然比检验与分布拟合检验	341
7.4.1	似然比检验的思想	341
7.4.2	分类数据的 χ^2 拟合优度检验	343
7.4.3	分布的 χ^2 拟合优度检验	345
7.4.4	列联表的独立性检验	348
	习题 7.4	350
§ 7.5	正态性检验	352
7.5.1	正态概率纸	352
7.5.2	W 检验	355
7.5.3	EP 检验	359
	习题 7.5	360
§ 7.6	非参数检验	360
7.6.1	游程检验	360
7.6.2	符号检验	363
7.6.3	秩和检验	366
	习题 7.6	370
第八章	方差分析与回归分析	373
§ 8.1	方差分析	373
8.1.1	问题的提出	373
8.1.2	单因子方差分析的统计模型	373
8.1.3	平方和分解	375
8.1.4	检验方法	377
8.1.5	参数估计	379
8.1.6	重复数不等情形	381
	习题 8.1	383
§ 8.2	多重比较	385
8.2.1	水平均值差的置信区间	385
8.2.2	多重比较问题	386
8.2.3	重复数相等场合的 T 法	386
8.2.4	重复数不等场合的 S 法	388
	习题 8.2	389
§ 8.3	方差齐性检验	390
8.3.1	哈特利检验	390
8.3.2	巴特利特检验	392
8.3.3	修正的巴特利特检验	394
	习题 8.3	395
§ 8.4	一元线性回归	396
8.4.1	变量间的两类关系	396
8.4.2	一元线性回归模型	396
8.4.3	回归系数的最小二乘估计	398

3. 设 x_1, x_2, \dots, x_{16} 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的样本, 考虑检验问题

$$H_0: \mu = 6 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq 6,$$

拒绝域取为 $W = \{|\bar{x} - 6| \geq c\}$, 试求 c 使得检验的显著性水平为 0.05, 并求该检验在 $\mu = 6.5$ 处犯第二类错误的概率.

4. 设总体为均匀分布 $U(0, \theta)$, x_1, x_2, \dots, x_n 是样本, 考虑检验问题

$$H_0: \theta \geq 3 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta < 3,$$

拒绝域取为 $W = \{x_{(n)} \leq 2.5\}$, 求检验犯第一类错误的最大值 α , 若要使得该最大值 α 不超过 0.05, n 至少应取多大?

5. 在假设检验问题中, 若检验结果是接受原假设, 则检验可能犯哪一类错误? 若检验结果是拒绝原假设, 则又有可能犯哪一类错误?

6. 设 x_1, x_2, \dots, x_{20} 是来自 0-1 总体 $b(1, p)$ 的样本, 考虑如下检验问题:

$$H_0: p = 0.2 \quad \text{vs} \quad H_1: p \neq 0.2,$$

取拒绝域为 $W = \left\{ \sum_{i=1}^{20} x_i \geq 7 \text{ 或 } \sum_{i=1}^{20} x_i \leq 1 \right\}$,

(1) 求 $p = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$ 时的势并由此画出势函数的图;

(2) 求在 $p = 0.05$ 时犯第二类错误的概率.

7. 设一个单一观测的样本 x 取自密度函数为 $p(x)$ 的总体, 对 $p(x)$ 考虑统计假设

$$H_0: p_0(x) = I_{[0,1]}(x) \quad \text{vs} \quad H_1: p_1(x) = 2xI_{[0,1]}(x).$$

若其拒绝域的形式为 $W = \{x: x \geq c\}$, 试确定一个 c , 使得犯第一类、第二类错误的概率满足 $\alpha + 2\beta$ 为最小, 并求其最小值.

8. 设 x_1, x_2, \dots, x_{30} 为取自泊松分布 $P(\lambda)$ 的随机样本.

(1) 试给出单侧假设检验问题 $H_0: \lambda \leq 0.1 \quad \text{vs} \quad H_1: \lambda > 0.1$ 的显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的检验;

(2) 求此检验的势函数 $\beta(\lambda)$ 在 $\lambda = 0.05, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$ 时的值, 并据此画出 $\beta(\lambda)$ 的图像.

§ 7.2 正态总体参数假设检验

本节对正态总体参数 μ 和 σ^2 的各种检验分别进行讨论.

7.2.1 单个正态总体均值的检验

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 考虑如下三种关于 μ 的检验问题:

$$\text{I} \quad H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu > \mu_0, \quad (7.2.1)$$

$$\text{II} \quad H_0: \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu < \mu_0, \quad (7.2.2)$$

$$\text{III} \quad H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq \mu_0, \quad (7.2.3)$$

其中 μ_0 是已知常数. 由于正态总体含两个参数, 总体方差 σ^2 已知与否对检验有影响. 下面我们分 σ 已知和未知两种情况叙述.

一、 $\sigma = \sigma_0$ 已知时的 u 检验

对于(7.2.1)式所示的单侧检验问题 I, 由于 μ 的点估计是 \bar{x} , 且 $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma_0^2/n)$, 故选用检验统计量

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \quad (7.2.4)$$

是恰当的.直觉告诉我们:当样本均值 \bar{x} 不超过设定均值 μ_0 时,应倾向于接受原假设;当样本均值 \bar{x} 超过 μ_0 时,应倾向于拒绝原假设.可是,在有随机性存在的场合,如果 \bar{x} 比 μ_0 大一点就拒绝原假设似乎不当,只有当 \bar{x} 比 μ_0 大到一定程度时拒绝原假设才是恰当的.这就存在一个临界值 c ,拒绝域为

$$W_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : u \geq c\}, \quad (7.2.5)$$

常简记为 $\{u \geq c\}$.若要求检验的显著性水平为 α ,则 c 满足

$$P_{\mu_0}(u \geq c) = \alpha.$$

由于在 $\mu = \mu_0$ 时, $u \sim N(0, 1)$,故 $c = u_{1-\alpha}$ (见图 7.2.1(a)),最后的拒绝域为

$$W_1 = \{u \geq u_{1-\alpha}\}. \quad (7.2.6)$$

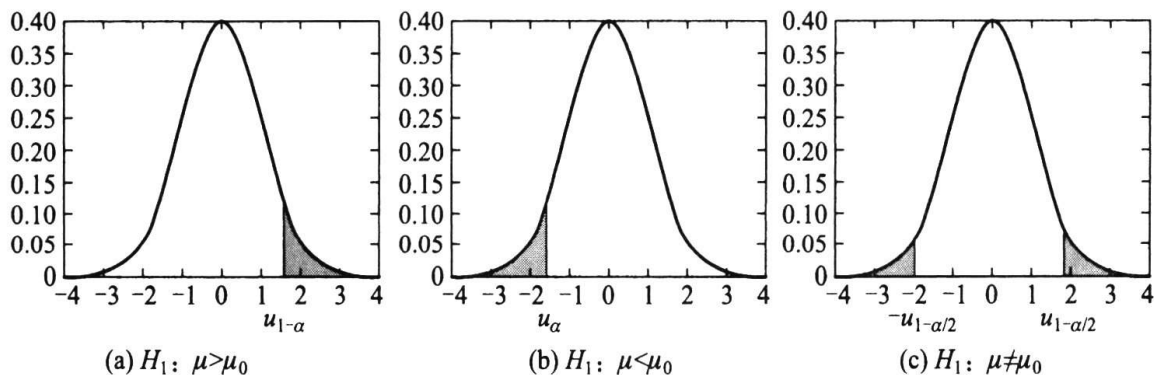


图 7.2.1 u 检验的拒绝域

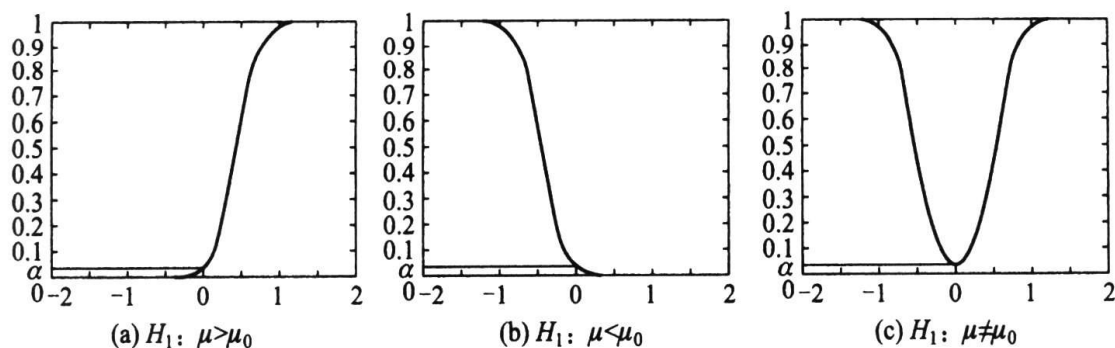
该检验用的检验统计量是 u 统计量,故一般称为 u 检验.该检验的势函数是 μ 的函数,它可用正态分布写出,具体如下:对 $\mu \in (-\infty, \infty)$,

$$\begin{aligned} g(\mu) &= P_{\mu}(X \in W_1) = P_{\mu}(u \geq u_{1-\alpha}) \\ &= P_{\mu}\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \geq u_{1-\alpha}\right) \\ &= P_{\mu}\left(\frac{\bar{x} - \mu + \mu - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \geq u_{1-\alpha}\right) \\ &= P_{\mu}\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \geq \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} + u_{1-\alpha}\right) \\ &= 1 - \Phi(\sqrt{n}(\mu_0 - \mu) / \sigma_0 + u_{1-\alpha}). \end{aligned}$$

由此可见,势函数是 μ 的增函数,其图形见图 7.2.2(a).由增函数性质知,只要 $g(\mu_0) = \alpha$,就可保证在 $\mu \leq \mu_0$ 时有 $g(\mu) \leq \alpha$.所以上述求出的检验是显著性水平为 α 的检验.

下面我们讲述用 p 值进行检验的方法.

类似于 7.1.3 节的讲述,对给定的样本观测值,可以计算出相应的检验统计量 u 的值,记为 $u_0 = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma_0}$,这里的 \bar{x} 是样本观测值.因在 $\mu = \mu_0$ 时, u 是服从标准正态分布

图 7.2.2 $g(\mu)$ 的图形

的随机变量,令

$$p_I = P(u \geq u_0) = 1 - \Phi(u_0), \quad (7.2.7)$$

此即说明 $u_0 = u_{1-p_I}$, 于是由正态分布函数的反函数的单调性有如下结论:

- 当 $p_I \leq \alpha$ 时, $u_{1-\alpha} \leq u_0$, 于是观测值落在拒绝域里, 应拒绝原假设.
- 当 $p_I > \alpha$ 时, $u_{1-\alpha} > u_0$, 于是观测值不在拒绝域里, 应接受原假设.

由此可以看出, (7.2.7) 计算出的值就是该检验的 p 值.

对检验问题 (7.2.2) 所示的单侧检验问题 II 的讨论是完全类似的. 仍选用 u 作为检验统计量, 考虑到 (7.2.2) 的备择假设 H_1 在左侧, 其拒绝域 (见图 7.2.1(b)) 为

$$W_{II} = \{u \leq u_\alpha\}. \quad (7.2.8)$$

而检验的 p 值为

$$p_{II} = P(u \leq u_0) = \Phi(u_0), \quad (7.2.9)$$

u_0, u 的含义同上, 后面还会用到就不再一一指出了.

对检验问题 (7.2.3) 所示的双侧检验问题 III, 也可类似进行讨论, 只不过检验的 p 值稍有不同. 仍选用 u 作为检验统计量, 考虑到 (7.2.3) 的备择假设 H_1 分散在两侧, 故其拒绝域亦应在两侧, 即拒绝域应有如下形式

$$W_{III} = \{|u| \geq c\}.$$

对给定的显著性水平 α ($0 < \alpha < 1$), 由 $P_{\mu_0}(|u| \geq c) = \alpha$ 可定出 $c = u_{1-\alpha/2}$ (见图 7.2.1(c)), 最后的拒绝域为

$$W_{III} = \{|u| \geq u_{1-\alpha/2}\}. \quad (7.2.10)$$

下面介绍双侧检验的 p 值的计算. 在检验统计量分布对称场合, 双侧检验的 p 值的计算与单侧检验是类似的, 不对称场合我们在后面介绍.

仿上, 令

$$p_{III} = P(|u| \geq |u_0|) = 2(1 - \Phi(|u_0|)), \quad (7.2.11)$$

此即说明 $|u_0| = u_{1-p_{III}/2}$, 这里要用到 u_0 的绝对值是因为对双侧假设检验, 观测值可能为正, 也可能为负, 二者机会相同, 于是有类似的结论:

- 当 $p_{III} \leq \alpha$ 时, $u_{1-\alpha/2} \leq |u_0|$, 于是观测值落在拒绝域里, 应拒绝原假设.
- 当 $p_{III} > \alpha$ 时, $u_{1-\alpha/2} > |u_0|$, 于是观测值不在拒绝域里, 应接受原假设.

由此可以看出, (7.2.11) 计算出的值就是该检验的 p 值.

例 7.2.1 从甲地发送一个信号到乙地. 设乙地接收到的信号值是一个服从正态分布 $N(\mu, 0.2^2)$ 的随机变量, 其中 μ 为甲地发送的真实信号值. 现甲地重复发送同一信号

5次,乙地接收到的信号值为

$$8.05 \quad 8.15 \quad 8.2 \quad 8.1 \quad 8.25,$$

设接收方有理由猜测甲地发送的信号值为8,问能否接受这猜测?

解 这是一个假设检验的问题,总体 $X \sim N(\mu, 0.2^2)$,待检验的原假设 H_0 与备择假设 H_1 分别为

$$H_0: \mu = 8 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq 8.$$

这是一个双侧检验问题,检验的拒绝域为 $\{|u| \geq u_{1-\alpha/2}\}$.取显著性水平 $\alpha = 0.05$,则查表知 $u_{0.975} = 1.96$.由该例中观测值可计算得出

$$\bar{x} = 8.15, \quad u_0 = \sqrt{5}(8.15 - 8)/0.2 = 1.68,$$

u_0 值未落入拒绝域 $\{|u| \geq 1.96\}$ 内,故不能拒绝原假设,即接受原假设,可认为猜测成立.

我们也可以采用 p 值完成此次检验.此处 $u_0 = 1.68$,根据(7.2.11)式,

$$p = 2(1 - \Phi(1.68)) = 0.093.$$

由于 p 值大于事先给定的水平 0.05,故不能拒绝原假设,结论是相同的.

进一步,我们从 p 值还可以看到,只要事先给定的显著性水平不高于 0.093,则都不能拒绝原假设;而若事先给定的显著性水平高于 0.093,如事先给定的显著性水平为 0.10,则检验就会作出拒绝原假设的结论.

说明:在实际中也经常会遇到如下两个检验问题:

$$\text{IV} \quad H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu > \mu_0,$$

$$\text{V} \quad H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu < \mu_0.$$

它仍可用检验统计量 u 施行检验.检验问题IV的拒绝域与检验问题I的拒绝域相同,即 $W_{\text{IV}} = \{u \geq u_{1-\alpha}\}$.这是因为检验问题IV与I的备择假设相同,而IV的原假设是I的原假设的子集,由于此时 u 检验的势函数是 μ 的单调增函数,因此,检验问题IV的显著性水平为 α 的检验与检验问题I的显著性水平为 α 的检验是相同的,从而拒绝域也相同,它们的检验的 p 值也相同.类似地,检验问题V与检验问题II的拒绝域以及 p 值也是相同的.这个现象在以后其他检验中也会出现,结论是相似的.由此,本文中不再考虑诸如IV, V的检验问题(若出现此类检验问题,可归结为检验问题I, II处理).

二、 σ 未知时的 t 检验

对检验问题I,由于 σ 未知,无法使用(7.2.4)式作检验.一个自然的想法是将(7.2.4)式中未知的 σ 替换成样本标准差 s ,这就形成 t 检验统计量

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{s}. \quad (7.2.12)$$

由推论 5.4.2 知,在 $\mu = \mu_0$ 时, $t \sim t(n-1)$,从而检验问题I的拒绝域为

$$W_I = \{t \geq t_{1-\alpha}(n-1)\}, \quad (7.2.13)$$

检验的 p 值是类似的,对给定的样本观测值,可以计算出相应的检验统计量 t 的

值,记为 $t_0 = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{s}$,这里的 \bar{x}, s 可由样本观测值算得.因 t 是服从自由度是 $n-1$ 的 t

分布的随机变量,则

$$p_I = P(t \geq t_0). \quad (7.2.14)$$

对另两组检验问题的讨论是完全类似于上一小节的,罗列结果如下:检验问题 II 的拒绝域为

$$W_{II} = \{t \leq t_\alpha(n-1)\}, \quad (7.2.15)$$

p 值为

$$p_{II} = P(t \leq t_0). \quad (7.2.16)$$

检验问题 III 的拒绝域为

$$W_{III} = \{|t| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)\}, \quad (7.2.17)$$

p 值为

$$p_{III} = P(|t| \geq |t_0|), \quad (7.2.18)$$

同样可证明这三个检验都是显著性水平为 α 的检验.

例 7.2.2 某厂生产的某种铝材的长度服从正态分布,其均值设定为 240 cm. 现从该厂抽取 5 件产品,测得其长度(单位:cm)为

$$239.7 \quad 239.6 \quad 239 \quad 240 \quad 239.2,$$

试判断该厂此类铝材的长度是否满足设定要求?

这是一个关于正态均值的双侧假设检验问题.原假设是 $H_0: \mu = 240$, 备择假设是 $H_1: \mu \neq 240$. 由于 σ 未知,故采用 t 检验,其拒绝域为 $\{|t| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)\}$, 若取 $\alpha = 0.05$, 则查表得 $t_{0.975}(4) = 2.7764$. 现由样本计算得到 $\bar{x} = 239.5, s = 0.4$, 故

$$t_0 = \sqrt{5}(239.5 - 240)/0.4 = -2.795,$$

由于 $|t_0| = 2.795 > 2.7764$, 故拒绝原假设,认为该厂生产的铝材的长度不满足设定要求.

下面用 p 值再作一次检验.此处 $t_0 = -2.795$, 记 t 是服从自由度是 4 的 t 分布的随机变量,则根据(7.2.18),

$$p = P(|t| \geq 2.795) = 2P(t \geq 2.795),$$

利用统计软件(如 R 或 Excel)可计算出具体 p 值为 0.0491, 由于 p 值小于事先给定的显著性水平 0.05, 故拒绝原假设,结论是相同的.

综上,关于单个正态总体的均值的检验问题可汇总成表 7.2.1.

表 7.2.1 单个正态总体均值的假设检验

检验法	H_0	H_1	检验统计量	拒绝域	p 值
u 检验 ($\sigma = \sigma_0$ 已知)	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$	$\{u \geq u_{1-\alpha}\}$	$1 - \Phi(u_0)$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$\{u \leq u_\alpha\}$	$\Phi(u_0)$
	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$		$\{ u \geq u_{1-\alpha/2}\}$	$2(1 - \Phi(u_0))$
t 检验 (σ 未知)	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$\{t \geq t_{1-\alpha}(n-1)\}$	$P(t \geq t_0)$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$\{t \leq t_\alpha(n-1)\}$	$P(t \leq t_0)$
	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$		$\{ t \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)\}$	$P(t \geq t_0)$

注: $u_0 = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)/\sigma_0, t_0 = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)/s, u$ 是服从 $N(0, 1)$ 的随机变量, t 是服从 $t(n-1)$ 的随机变量.